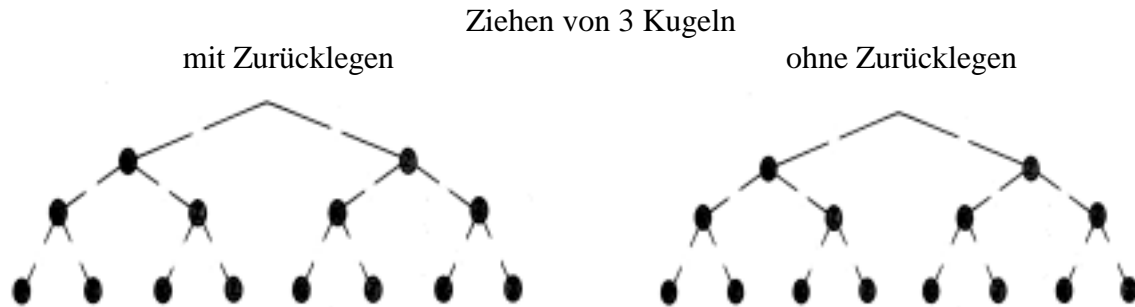


Bernoulli-Kette

Urne mit 12 Kugeln: 7 blaue, 5 weiße (andere)
Ziehen von 3 Kugeln

$P(„k Kugeln blau“) = ? ; k = 0, 1, 2, 3$



Gemeinsamkeiten?

1. 3-stufiges Zufallsexperiment
2. zwei mögliche Ergebnisse auf jeder Stufe

Was ändert sich, wenn die 5 weißen gegen 2 gelbe und 3 grüne Kugeln ausgetauscht werden?

Ein Zufallsversuch mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Erfolg bzw. Misserfolg) heißt ein **Bernoulli – Versuch**.

(Jacob Bernoulli 1654-1705)

Wird ein Bernoulli – Versuch n-mal so wiederholt, dass sich die Erfolgswahrscheinlichkeit p und die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg q ($q = 1-p$) nicht ändert, so spricht man von einer **Bernoullikette**.

(äquivalent: die einzelnen Versuche müssen voneinander unabhängig sein.; siehe Bsp. mit Zurücklegen)

Ergebnisse: 1...Erfolg (blaue Kugel gezogen), 0...Misserfolg (gezogene Kugel ist nicht blau)

k	mögliche Ergebnisse	P("k Kugeln blau")	
		mit Zurücklegen (Bernoullikette)	ohne Zurücklegen
0	000		
1	001		
	010		
	100		
2	011		
	101		
	110		
3	111		

Allgemein:

n-fache Bernoullikette:

1. Welche Wahrscheinlichkeit hat ein Pfad mit genau k Erfolgen ($k = 0, 1, \dots, n$)?

$$P(\text{ein Pfad hat genau 0 Erfolge}) = q^n$$

$$P(\text{ein Pfad hat genau 1 Erfolge}) = p \cdot q^{n-1}$$

$$P(\text{ein Pfad hat genau 8 Erfolge}) = p^8 q^{n-8}$$

$$P(\text{ein Pfad hat genau n Erfolge}) = p^n$$

$$\mathbf{P(\text{ein Pfad hat genau k Erfolge})} = p^k q^{n-k}$$

2. Wie viele Pfade mit genau k Erfolgen gibt es ($k = 0, 1, \dots, n$)?

Modell: Urne mit n Kugeln,
Ziehen von k Kugeln ungeordnet, ohne Zurücklegen
Wie viele Möglichkeiten gibt es k Kugeln aus n zu ziehen?

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus n Stufen k Stufen mit Erfolg auszuwählen.

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf ($k = 0, 1, \dots, n$)?

$$P(X = 0) = P(\text{genau 0 Erfolge}) = \binom{n}{0} p^0 \cdot (1-p)^n = \binom{n}{0} p^0 \cdot q^n$$

$$P(X = k) = P(\text{genau k Erfolge}) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

In einer Bernoullikette der Länge n mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p treten genau k Erfolge mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{genau k Erfolge}) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ auf.}$$