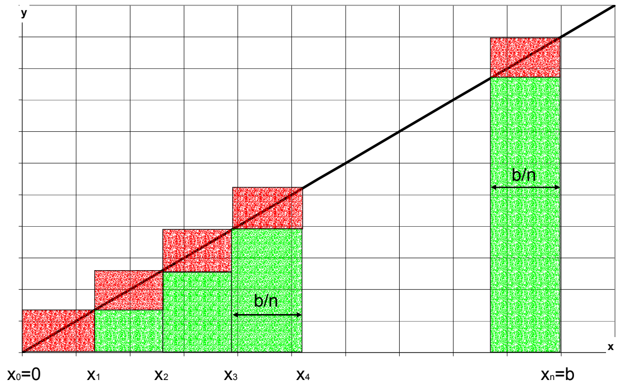
Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x im Intervall [a; b] mit a, b∈R; 0 ≤ a ≤ b



Berechnung des Flächeninhaltes unter dem Graphen im Intervall [0; b]:

Das Intervall [0; b] wird in n gleiche Teilintervalle unterteilt. Die Breite eines Streifens beträgt dann $\frac{b}{n}$.

Der kleinste Funktionswert eines Teilintervalls $[x_{i-1}; x_i]$ ist $f(x_{i-1})$, der größte ist $f(x_i)$, weil $f(x)=x$ eine monoton wachsende Funktion ist. Das Argument x_i ist die Breite von i Streifen: $x_i = i\cdot\frac{b}{n}$.

Mit wachsendem n nähert sich die Untersumme von unten, die Obersumme von oben dem Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)=x$ an. Der gemeinsame Grenzwert ist der gesuchte Flächeninhalt.

Zur Berechnung der Grenzwerte wird die Summe der ersten m Zahlen benötigt: $1+2+3+...+m=\frac{1}{2}m(m+1)$

A	L	Teilintervalle: Funktionswerte		Untersumme	Obersumme
n	$\frac{b}{n}$	$f(x_0)=f(0)=0$	$f(x_1)=f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)$	$\begin{aligned} s_n &= \frac{b}{n}\cdot\left[f(0)+f\left(\frac{b}{n}\right)+f\left(\frac{2b}{n}\right)+...+f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)\right] \\ &= \frac{b}{n}\cdot\left[0+\left(\frac{b}{n}\right)+\left(\frac{2b}{n}\right)+...+\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)\right] \\ &= \frac{b}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)b}{n} \\ &= \frac{b^2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= \frac{b^2}{n^2}\cdot\left[\frac{1}{2}(n-1)n\right] \\ &= \frac{b^2}{2n}\cdot[n-1] \\ &= b^2\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right] \end{aligned}$	$\begin{aligned} S_n &= \frac{b}{n}\cdot\left[f\left(\frac{b}{n}\right)+f\left(\frac{2b}{n}\right)+...+f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)+f\left(\frac{nb}{n}\right)\right] \\ &= \frac{b}{n}\cdot\left[\left(\frac{b}{n}\right)+\left(\frac{2b}{n}\right)+...+\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)+\left(\frac{nb}{n}\right)\right] \\ &= \frac{b}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{ib}{n} \\ &= \frac{b^2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}i \\ &= \frac{b^2}{n^2}\cdot\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] \\ &= \frac{b^2}{2n}\cdot[n+1] \\ &= b^2\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right] \end{aligned}$
		$f(x_1)=f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)$	$f(x_2)=f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)$		
		$f(x_2)=f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)$	$f(x_3)=f\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)$		
		…	…		
		$f(x_{i-1})=f\left((i-1)\cdot\frac{b}{n}\right)=\left((i-1)\cdot\frac{b}{n}\right)$	$f(x_i)=f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)$		
		…	…		
		$f(x_{n-1})=f\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)=\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)$	$f(x_n)=f\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)$		
			Grenzwerte:	$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{b^2}{2}$	$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{b^2}{2}$

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x im Intervall [0; b] beträgt $\frac{b^2}{2}$.

⇒ Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x im Intervall [0; a] beträgt $\frac{a^2}{2}$.

⇒ Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x im Intervall [a; b] beträgt $\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$.

Bezeichnungen: A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle