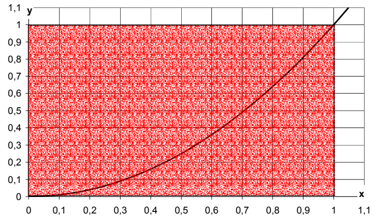
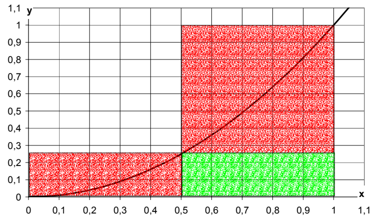
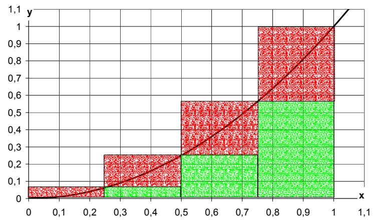
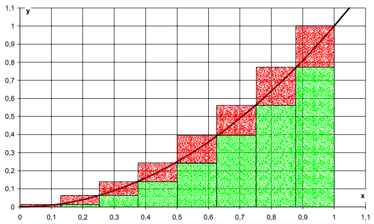
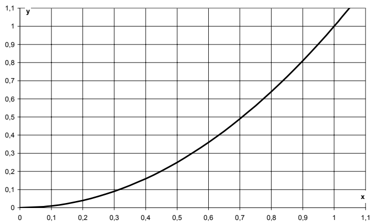
Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x² im Intervall [0; 1]

<table>
<tr><th>Graph</th><th>n</th><th>A</th><th>L</th><th colspan="2">Teilintervalle: Funktionswerte</th><th>Untersumme</th><th>Obersumme</th></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>f(0) = 0</td><td>f(1) = 1</td><td>$s_0 = 1 \cdot 0$
$= 0$</td><td>$S_0 = 1 \cdot 1$
$= 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td>f(0) = 0</td><td>$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$</td><td rowspan="2">$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$
$s_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[0 + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[0 + \frac{1}{2^2}\right]$
$s_1 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{i-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^1} \cdot \sum_{i=1}^{2^1} \left(\frac{i-1}{2^1}\right)^2$</td><td rowspan="2">$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{8} = 0{,}625$
$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} + 1\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{2^2}\right]$
$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^1} \cdot \sum_{i=1}^{2^1} \left(\frac{i}{2^1}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$</td><td>f(1) = 1</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td></td><td></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Bezeichnungen: n…Nummer der Teilung; A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle

Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x² im Intervall [0; 1]

	3						
…	…	…	…	…	…	...	…
	n						

Der Flächeninhalt liegt zwischen _______ und ________. Mit wachsendem n nähern sich die Untersummen und Obersummen immer mehr dem gesuchten Flächeninhalt an. Der gesuchte Flächeninhalt ist der gemeinsame Grenzwert der beiden Zahlenfolgen für die Untersumme und Obersumme.

Setzen $k = 2^n$. Summe der ersten m Quadratzahlen: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x² im Intervall [0; 1] beträgt

Bezeichnungen: n…Nummer der Teilung; A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle