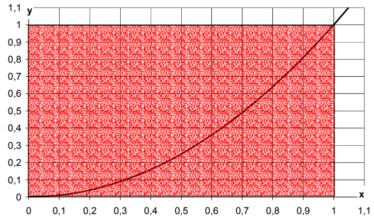
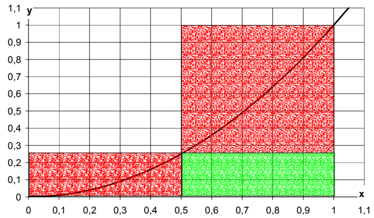
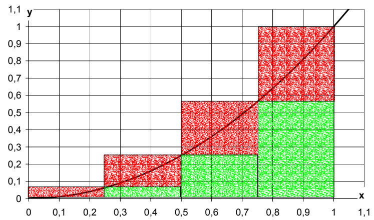
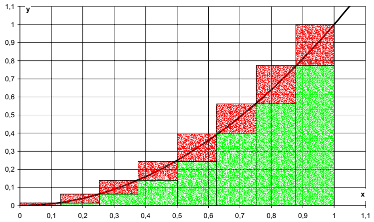
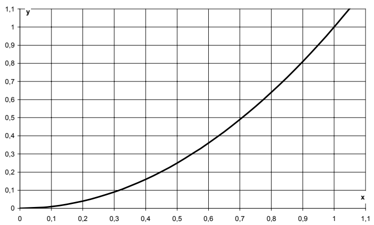
Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x² im Intervall [0; 1]

Graph	n	A	L	Teilintervalle: Funktionswerte		Untersumme	Obersumme
	0	1	1	f(0) = 0	f(1) = 1	$s_0 = 1\cdot 0$ $= 0$	$S_0 = 1\cdot 1$ $= 1$
	1	2	$\frac{1}{2}$	f(0) = 0	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}=0{,}125$ $s_1 = \frac{1}{2}\cdot\left[0+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[0+\frac{1}{2^2}\right]$ $s_1 = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{i-1}{2}\right)^2=\frac{1}{2^1}\cdot\sum_{i=1}^{2^1}\left(\frac{i-1}{2^1}\right)^2$	$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{5}{8}=0{,}625$ $S_1 = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{4}+1\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{2^2}\right]$ $S_1 = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{i}{2}\right)^2=\frac{1}{2^1}\cdot\sum_{i=1}^{2^1}\left(\frac{i}{2^1}\right)^2$
				$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$	f(1) = 1		
	2	4	$\frac{1}{4}$	f(0) = 0	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}$	$s_2 = \frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}$ $=\frac{7}{32}\approx 0{,}219$ $s_2 = \frac{1}{4}\cdot\left[0+\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}\right]$ $=\frac{1}{2^2}\cdot\left[0+\frac{1}{2^4}+\frac{2^2}{2^4}+\frac{3^2}{2^4}\right]$ $s_2 = \frac{1}{2^2}\cdot\sum_{i=1}^{2^2}\left(\frac{i-1}{2^2}\right)^2$	$S_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}+\frac{1}{4}\cdot 1$ $=\frac{15}{32}\approx 0{,}469$ $S_2 = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}+\frac{16}{16}\right]$ $=\frac{1}{2^2}\cdot\left[\frac{1}{2^4}+\frac{2^2}{2^4}+\frac{3^2}{2^4}+\frac{4^2}{2^4}\right]$ $S_2 = \frac{1}{2^2}\cdot\sum_{i=1}^{2^2}\left(\frac{i}{2^2}\right)^2$
				$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$		
				$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$		
				$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$	f(1) = 1		

Bezeichnungen: n…Nummer der Teilung; A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle

Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x² im Intervall [0; 1]

	3	8	$\frac{1}{8}$	f(0) = 0	$f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{64}$	$s_3=\frac{1}{8}\cdot\left[0+\frac{1}{64}+\frac{4}{64}+\frac{9}{64}+\frac{16}{64}+\frac{25}{64}+\frac{36}{64}+\frac{49}{64}\right]$ $=\frac{35}{128}\approx 0{,}273$ $s_3=\frac{1}{2^3}\cdot\left[0+\frac{1}{2^6}+\frac{2^2}{2^6}+\frac{3^2}{2^6}+\frac{4^2}{2^6}+\frac{5^2}{2^6}+\frac{6^2}{2^6}+\frac{7^2}{2^6}\right]$ $s_3=\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{i=1}^{2^3}\left(\frac{i-1}{2^3}\right)^2$	$S_3=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{1}{64}+\frac{4}{64}+\frac{9}{64}+\frac{16}{64}+\frac{25}{64}+\frac{36}{64}+\frac{49}{64}+\frac{64}{64}\right]$ $=\frac{51}{128}\approx 0{,}398$ $S_3=\frac{1}{2^3}\cdot\left[\frac{1}{2^6}+\frac{2^2}{2^6}+\frac{3^2}{2^6}+\frac{4^2}{2^6}+\frac{5^2}{2^6}+\frac{6^2}{2^6}+\frac{7^2}{2^6}+\frac{8^2}{2^6}\right]$ $S_3=\frac{1}{2^3}\cdot\sum_{i=1}^{2^3}\left(\frac{i}{2^3}\right)^2$
				$f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{64}$	$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}$		
				$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}$	$f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{64}$		
				$f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{64}$	$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$		
				$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{25}{64}$		
				$f\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{25}{64}$	$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$		
				$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$	$f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{49}{64}$		
				$f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{49}{64}$	f(1) = 1		
…	…	…	…	…	…	...	…
	n	2^n	$\frac{1}{2^n}$			$s_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{i-1}{2^n}\right)^2$	$S_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{i}{2^n}\right)^2$

Der Flächeninhalt liegt zwischen 0,273 und 0,398. Mit wachsendem n nähern sich die Untersummen und Obersummen immer mehr dem gesuchten Flächeninhalt an. Der gesuchte Flächeninhalt ist der gemeinsame Grenzwert der beiden Zahlenfolgen für die Untersumme und Obersumme.

Setzen $k=2^n$. Summe der ersten m Quadratzahlen: $1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

$$s_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{i-1}{2^n}\right)^2 \quad\Rightarrow s_k=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i-1}{k}\right)^2=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2}=\frac{1}{k^3}\cdot\sum_{i=1}^{k}(i-1)^2=\frac{1}{k^3}\cdot\left[\frac{1}{6}(k-1)k(2k-1)\right]=\frac{1}{k^3}\cdot\left[\frac{1}{6}\left(2k^3-3k^2+k\right)\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k^2} \quad\Rightarrow s_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{6\cdot 2^{2n}} \quad\Rightarrow \lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}$$

$$S_n=\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{i=1}^{2^n}\left(\frac{i}{2^n}\right)^2 \quad\Rightarrow S_k=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{k}\right)^2=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2}=\frac{1}{k^3}\cdot\sum_{i=1}^{k}i^2=\frac{1}{k^3}\cdot\left[\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right]=\frac{1}{k^3}\cdot\left[\frac{1}{6}\left(2k^3+3k^2+k\right)\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k^2} \quad\Rightarrow S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{6\cdot 2^{2n}} \quad\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$$

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x² im Intervall [0; 1] beträgt $\frac{1}{3}$.

Bezeichnungen: n…Nummer der Teilung; A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle