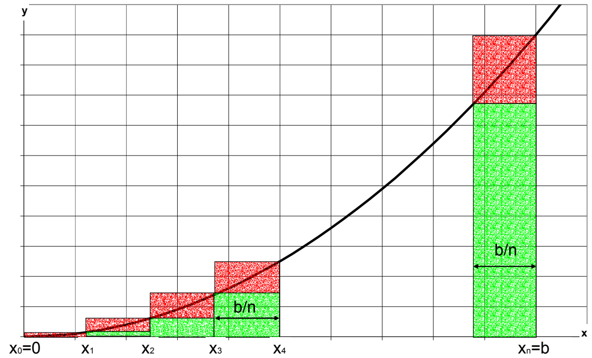
Berechnung der Fläche unter dem Graphen von f(x) = x² im Intervall [a; b] mit a, b∈R; 0 ≤ a ≤ b



<u>Berechnung des Flächeninhaltes unter dem Graphen im Intervall [0; b]:</u>

Das Intervall [0; b] wird in n gleiche Teilintervalle unterteilt. Die Breite eines Streifens beträgt dann $\frac{b}{n}$.

Der kleinste Funktionswert eines Teilintervalls $[x_{i-1}; x_i]$ ist $f(x_{i-1})$, der größte ist $f(x_i)$, weil $f(x)=x^2$ eine monoton wachsende Funktion ist. Das Argument x_i ist die Breite von i Streifen: $x_i = i\cdot\frac{b}{n}$.

Mit wachsendem n nähert sich die Untersumme von unten, die Obersumme von oben dem Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)=x^2$ an. Der gemeinsame Grenzwert ist der gesuchte Flächeninhalt.

Zur Berechnung der Grenzwerte wird die Summe der ersten m Quadratzahlen benötigt: $1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

<table>
<tr><th>A</th><th>L</th><th colspan="2">Teilintervalle: Funktionswerte</th><th>Untersumme</th><th>Obersumme</th></tr>
<tr><td rowspan="7">n</td><td rowspan="7">$\frac{b}{n}$</td><td>$f(x_0)=f(0)=0^2$</td><td>$f(x_1)=f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td><td rowspan="7">$s_n=\frac{b}{n}\cdot\left[f(0)+f\left(\frac{b}{n}\right)+f\left(\frac{2b}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)\right]$
$=\frac{b}{n}\cdot\left[0+\left(\frac{b}{n}\right)^2+\left(\frac{2b}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2\right]$
$=\frac{b}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(i-1)b}{n}\right]^2$
$=\frac{b^3}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$
$=\frac{b^3}{n^3}\cdot\left[\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right]$
$=\frac{b^3}{6n^2}\cdot\left[2n^2-3n+1\right]$
$=b^3\cdot\left[\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right]$</td><td rowspan="7">$S_n=\frac{b}{n}\cdot\left[f\left(\frac{b}{n}\right)+f\left(\frac{2b}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{nb}{n}\right)\right]$
$=\frac{b}{n}\cdot\left[\left(\frac{b}{n}\right)^2+\left(\frac{2b}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{nb}{n}\right)^2\right]$
$=\frac{b}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{ib}{n}\right]^2$
$=\frac{b^3}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^2$
$=\frac{b^3}{n^3}\cdot\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$
$=\frac{b^3}{6n^2}\cdot\left[2n^2+3n+1\right]$
$=b^3\cdot\left[\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right]$</td></tr>
<tr><td>$f(x_1)=f\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td><td>$f(x_2)=f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>$f(x_2)=f\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td><td>$f(x_3)=f\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$f(x_{i-1})=f\left((i-1)\cdot\frac{b}{n}\right)=\left((i-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td><td>$f(x_i)=f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$f(x_{n-1})=f\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)=\left((n-1)\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td><td>$f(x_n)=f\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)=\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="right">Grenzwerte:</td><td>$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{b^3}{3}$</td><td>$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{b^3}{3}$</td></tr>
</table>

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x² im Intervall [0; b] beträgt $\frac{b^3}{3}$.

⇒ Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x² im Intervall [0; a] beträgt $\frac{a^3}{3}$.

⇒ Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f(x) = x² im Intervall [a; b] beträgt $\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$.

Bezeichnungen: A…Anzahl der Teilintervalle; L…Länge der Teilintervalle