Grenzwertsätze von Zahlenfolgen

1. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.
   (explizite Bildungsvorschrift; exakter Wert und einen auf 2 Dezimalstellen gerundeten Wert für die Folgeglieder)
2. Vermuten Sie den Grenzwert und zeigen Sie, dass die Zahlenfolge gegen den von Ihnen vermuteten Wert konvergiert.
3. Wie entsteht der Grenzwert der Summen-, der Differenzen-, der Produkt- und der Quotientenfolge aus den Grenzwerten der Folgen (a_n) und (b_n)?

MuPAD-Befehle für die Folge (a_n):

- **(4*n-1)/n $ n=1..10;**
- **float((4*n-1)/n) $ n=1..10;**

			Summenfolge $s_n = a_n + b_n$	**Differenzenfolge** $d_n = a_n - b_n$	**Produktfolge** $p_n = a_n \cdot b_n$	**Quotientenfolge** $q_n = \frac{a_n}{b_n}$
n	$a_n = \frac{4n-1}{n}$	$b_n = \frac{3n+4}{2n}$	$s_n = \frac{11n+2}{2n}$			
1	3	$\frac{7}{2} \approx 3{,}5$	$\frac{13}{2} = 6{,}5$			
2	$\frac{7}{2} = 3{,}5$	$\frac{5}{2} = 2{,}5$		1		
3	$\frac{11}{3} \approx 3{,}67$	$\frac{13}{6} \approx 2{,}17$				
4	$\frac{15}{4} = 3{,}75$	2			$\frac{15}{2} = 7{,}5$	
5	$\frac{19}{5} = 3{,}8$	$\frac{19}{10} = 1{,}9$				
6	$\frac{23}{6} \approx 3{,}83$	$\frac{11}{6} \approx 1{,}83$				$\frac{23}{11} \approx 2{,}09$
7	$\frac{27}{7} \approx 3{,}86$	$\frac{25}{14} \approx 1{,}79$	$\frac{79}{14} \approx 5{,}64$			
8	$\frac{31}{8} \approx 3{,}88$	$\frac{7}{4} = 1{,}75$				
9	$\frac{35}{9} \approx 3{,}89$	$\frac{31}{18} \approx 1{,}72$			$\frac{1085}{162} \approx 6{,}70$	
10	$\frac{39}{10} = 3{,}9$	$\frac{17}{10} = 1{,}7$				
g	4	$\frac{3}{2}$				
Entstehung	g_1	g_2				

Grenzwertnachweis für die Folge (a_n):

Rechnung: $|a_n - g| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4n-1}{n} - 4\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|4 - \frac{1}{n} - 4\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Formulierung: Sei ε > 0 beliebig vorgegeben. Es sei $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$.

Dann gilt für alle n > n_0: $|a_n - g| = \left|\frac{4n-1}{n} - 4\right| = \left|4 - \frac{1}{n} - 4\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon$, also $|a_n - 4| < \varepsilon$.

Die Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert 4.