

## Definitionen und Sätze: Bestimmtes Integral

### Definition (bestimmtes Integral):

Es sei  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  definierte Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[a; b]$  einen kleinsten und einen größten Funktionswert besitzt.

Haben die beiden Folgen  $(s_n) = \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \right)$  und  $(S_n) = \left( \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x \right)$  einen

gemeinsamen Grenzwert, so heißt dieser gemeinsame Grenzwert das **bestimmte Integral** der Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$ .

Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$  (Integral über  $f(x) dx$  von  $a$  bis  $b$ )

#### Bezeichnungen

$a, b, \dots$  Integrationsgrenzen  
 $[a; b], \dots$  Integrationsintervall  
 $f(x), \dots$  Integrand  
 $x, \dots$  Integrationsvariable  
 $\int, \dots$  Integralzeichen

### Erläuterungen:

- Das Intervall  $[a; b]$  wird in  $n$  gleich lange Teilintervalle zerlegt. Die Randstellen der Teilintervalle seien mit  $x_0 = a; x_1; x_2; x_3; \dots; x_{n-1}; x_n = b$  bezeichnet.
- $\Delta x$  ist die Länge der Teilintervalle:  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- $f(x_i)$  ist der kleinste,  $f(\bar{x}_i)$  ist der größte Funktionswert im  $i$ -ten Teilintervall
- Man darf bei einem Integral die Integrationsvariable beliebig ändern, weil die Unter- und Obersummen davon unabhängig sind:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$
- Auf die Voraussetzung der Existenz der Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  wird in der Definition verzichtet, weil:
  - Die Untersumme  $s_n$  nähert sich mit wachsendem  $n$  immer mehr dem gesuchten Flächeninhalt von unten an. Die Folge  $(s_n)$  ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt. Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.
  - Die Obersumme  $S_n$  nähert sich mit wachsendem  $n$  immer mehr dem gesuchten Flächeninhalt von oben an. Die Folge  $(S_n)$  ist also monoton fallend und nach unten beschränkt. Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.
- Jede stetige Funktion, jede monotone Funktion hat in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Definitionsbereichs einen kleinsten und einen größten Funktionswert.
  - Wenn  $f$  im Intervall  $[a; b]$  stetig ist, ist außerdem die Existenz des bestimmten Integrals gesichert, denn dann gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$
  - Wenn  $f$  im Intervall  $[a; b]$  monoton ist, ist außerdem die Existenz des bestimmten Integrals gesichert, denn dann gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$
- Diese Eigenschaft erfüllen auch einige Funktionen, die weder stetig noch monoton sind.
- Das bestimmte Integral ist eine feste eindeutige Zahl.

### Definition (geometrische Deutung des bestimmten Integrals):

Es sei  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  definierte und dort nichtnegative Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall einen kleinsten und einen größten Funktionswert besitzt. Dann ist das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$

diejenige positive Zahl, die den Inhalt der Fläche angibt, die vom Graphen der Funktion  $f$ , der Abszissenachse und den Geraden  $x = a$  und  $x = b$  begrenzt wird.

### Definition (Eigenschaften des bestimmten Integrals):

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \int_a^a f(x) dx = 0 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{Additivität mit } c \in [a; b])$$

## Definitionen und Sätze: Bestimmtes Integral

### Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion, dann gibt es mindestens eine Zahl  $x_0$  mit  $a < x_0 < b$ , für deren Funktionswert  $f(x_0)$  gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0) \cdot (b - a).$$

- Es gibt ein Rechteck mit den Seitenlängen  $(b - a)$  und  $f(x_0)$ , so dass der Flächeninhalt des Rechtecks mit der Fläche unter der Kurve überein übereinstimmt.
- Die Zahl  $f(x_0) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$  heißt **Mittelwert der Funktion  $f$**  über dem Intervall  $[a; b]$



### Definition (Bestimmtes Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze):

Gegeben ist eine Funktion  $f$ . Die Funktion  $\Phi$ , die jedem  $x$  den Wert des Integrals  $\int_a^x f(t) dt$  zuordnet, heißt Integralfunktion von  $f$  mit der unteren Grenze  $a$ .

Definitionsbereich von  $\Phi$ : Menge aller  $x$ , für die  $\int_a^x f(t) dt$  existiert

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \dots \text{Integralfunktion}$$

$f(t)$ ...Integrandenfunktion

Die Ableitung der Integralfunktion  $\Phi$  ist die Integrandenfunktion  $f$ .  $\Rightarrow$  Die Integralfunktion  $\Phi$  ist eine Stammfunktion des Integranden  $f$ .

### Satz (Zusammenhang zwischen bestimmten Integral und Stammfunktion):

Für eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion  $f$  ist die Funktion  $\Phi$  mit  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  eine Stammfunktion von  $f$  im Intervall  $[a; b]$ .

### Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion und  $F$  eine zu  $f$  gehörige Stammfunktion, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

- Beweis:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + c$$

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a)$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + c = F(b) - F(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ q.e.d.}$$

- Der Hauptsatz stellt einen Zusammenhang zwischen der Differential- und Integralrechnung her.
- Der Hauptsatz verbindet zwei Sachverhalte, denen unterschiedliche Problemstellungen zugrunde lagen:
  - das bestimmte Integral (das über Grenzwerte von Zahlenfolgen definiert ist) und
  - das unbestimmte Integral (das über die Umkehrung der Differentiation definiert ist)
- Der Hauptsatz ermöglicht die Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Stammfunktion.