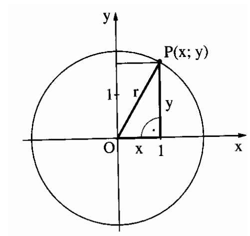
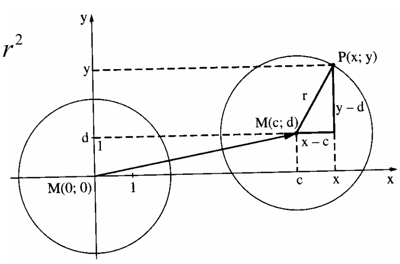
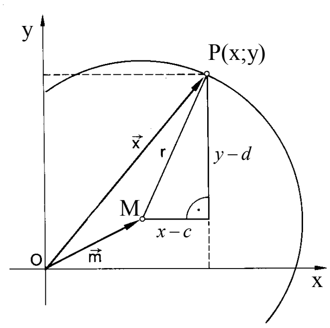
Kreis in der Ebene

Definition:
Die Menge aller Punkte P der Ebene, die von einem Punkt M denselben Abstand r haben, heißt ***Kreis*** mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

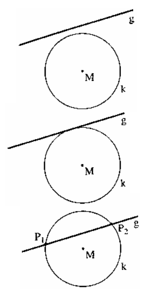
Koordinatengleichung	Vektorgleichung
Mittelpunktgleichung eines Kreises In einem kartesischen Koordinatensystem hat der Kreis k um M(0; 0) die Gleichung	
$x^2+y^2=r^2$ 	$\vec{x}^2=r^2$
Kreisgleichung eines Kreises mit Mittelpunkt M(c; d) In einem kartesischen Koordinatensystem hat der Kreis k um M(c; d) die Gleichung	
$\left(x-c\right)^2+\left(y-d\right)^2=r^2$  **Kreisgleichung in quadratischer Form:** $\left(x-c\right)^2+\left(y-d\right)^2=r^2$ $\Rightarrow\ x^2-2cx+c^2+y^2-2dy+d^2=r^2$ $\Rightarrow\ x^2+y^2-2cx-2dy+c^2+d^2-r^2=0$	$\left(\vec{x}-\vec{m}\right)^2=r^2$ 

Lagebeziehung: Kreis – Punkt

- $P(x_1; y_1)$ ist ein Punkt des Kreises $\Leftrightarrow$ $\left(x_1-c\right)^2+\left(y_1-d\right)^2=r^2$ ist erfüllt
- $P(x_1; y_1)$ ist innerer Punkt des Kreises $\Leftrightarrow$ $\left(x_1-c\right)^2+\left(y_1-d\right)^2<r^2$ ist erfüllt
- $P(x_1; y_1)$ ist äußerer Punkt des Kreises $\Leftrightarrow$ $\left(x_1-c\right)^2+\left(y_1-d\right)^2>r^2$ ist erfüllt

Lagebeziehung: Kreis – Gerade

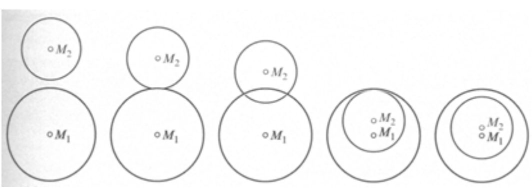
- g ist Passante von k $\Leftrightarrow$ kein Punkt gemeinsam $\Leftrightarrow$ $\left(x-c\right)^2+\left(mx+n-d\right)^2=r^2$ hat keine Lösung
- g ist Tangente von k $\Leftrightarrow$ ein Punkt gemeinsam $\Leftrightarrow$ $\left(x-c\right)^2+\left(mx+n-d\right)^2=r^2$ hat eine Lösung
- g ist Sekante von k $\Leftrightarrow$ zwei Punkte gemeinsam $\Leftrightarrow$ $\left(x-c\right)^2+\left(mx+n-d\right)^2=r^2$ hat zwei Lösungen



Lagebeziehung: Kreis – Kreis

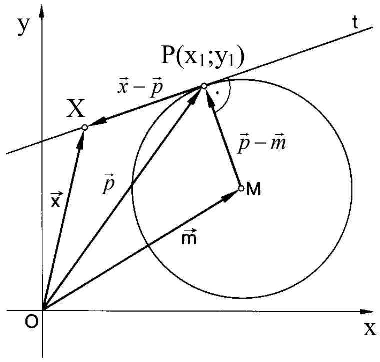
GLS: k_1: $\left(x-c_1\right)^2+\left(y-d_1\right)^2=r_1^2$ k_2: $\left(x-c_2\right)^2+\left(y-d_2\right)^2=r_2^2$

- k_1 und k_2 haben keinen Punkt gemeinsam $\Leftrightarrow$ GLS hat keine Lösung
- k_1 und k_2 haben einen Punkt gemeinsam $\Leftrightarrow$ GLS hat eine Lösung
- k_1 und k_2 haben zwei Punkte gemeinsam $\Leftrightarrow$ GLS hat zwei Lösungen
- k_1 und k_2 sind identisch $\Leftrightarrow$ $c_1 = c_2$ und $d_1 = d_2$



Tangentengleichung der Tangente an den Kreis k im Pkt. $P(x_1; y_1)$

geg.: k: $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ bzw. k: $(\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$ ges.: Tangentengleichung
$P(x_1; y_1)$

Koordinatenform	Vektorform
Die Gerade g(M; P) hat den Anstieg $m_g=\frac{y_1-d}{x_1-c}$ $\Rightarrow$ Die Tangente steht senkrecht zu der Geraden g(M; P) $m_t=-\frac{1}{m_g}=\frac{1}{-\frac{y_1-d}{x_1-c}}=\frac{c-x_1}{y_1-d}$ $\Rightarrow\ y-y_1=\frac{c-x_1}{y_1-d}\cdot(x-x_1)$ <u>Punkt-Richtungsgleichung einer Geraden:</u> $P(x_1; y_1)\in g \Rightarrow\ y_1=mx_1+n\ \Rightarrow\ n=y_1-mx_1\ \Rightarrow\ y=mx+y_1-mx_1$ $\Rightarrow\ y-y_1=m(x-x_1)$	$(\vec{x}-\vec{p})\bullet(\vec{p}-\vec{m})=0$ $\Rightarrow\ [(\vec{x}-\vec{m})-(\vec{p}-\vec{m})]\bullet(\vec{p}-\vec{m})=0$ $\Rightarrow\ (\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{p}-\vec{m})=(\vec{p}-\vec{m})\bullet(\vec{p}-\vec{m})$ $P\in k\Rightarrow\ (\vec{p}-\vec{m})^2=r^2$ $\Rightarrow\ (\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{p}-\vec{m})=r^2$ 
$\Rightarrow\ (y-y_1)(y_1-d)=(c-x_1)(x-x_1)$ $\Rightarrow\ (y-y_1)(y_1-d)+(x_1-c)(x-x_1)=0$ $\Rightarrow\ x(x_1-c)-x_1(x_1-c)+y(y_1-d)-y_1(y_1-d)=0$ **1** $P(x_1; y_1)\in k$ $\Rightarrow\ (x_1-c)^2+(y_1-d)^2=r^2$ $\Rightarrow\ x_1(x_1-c)-c(x_1-c)+y_1(y_1-d)-d(y_1-d)=r^2$ **2** **1 + 2** $\Rightarrow\ x(x_1-c)-c(x_1-c)+y(y_1-d)-d(y_1-d)=r^2$ $\Rightarrow\ (x-c)(x_1-c)+(y-d)(y_1-d)=r^2$	
Setzt man in die Kreisgleichung $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ bzw. $(\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$ für je ein x und ein y die Koordinaten des Punktes P ein, erhält man die Gleichung der Tangente an den Punkt.	

Beispiel:
geg.: M(4; -1); $r=\sqrt{5}$ ges.: Tangente an k in P(6; -2)

Koordinatenform	Vektorform
k: $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ $\Rightarrow$ k: $(x-4)(x-4)+(y+1)(y+1)=5$	k: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right]^2=5\ \Rightarrow$ k: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right]\bullet\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right]=5$
Tangentengleichung: $(x-4)(6-4)+(y+1)(-2+1)=5$ $\Rightarrow\ 2x-8-y-1=5$ $\Rightarrow\ y=2x-14$	Tangentengleichung: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right]\bullet\left[\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right]=5\ \Rightarrow\ \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=5$ $\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=14\Rightarrow\ 2x-y=14\ \Rightarrow\ y=2x-14$

Kugel im Raum

<u>Definition:</u>
Die Menge aller Punkte P des Raumes, die von einem Punkt M denselben Abstand r haben, heißt ***Kugel*** mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

Koordinatengleichung	Vektorgleichung
<u>Gleichung einer Kugel</u> In einem kartesischen Koordinatensystem hat die Kugel um M(a; b; c) die Gleichung	
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$	$(\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$