

Lehrprobe im Fach Mathematik

Thema der Unterrichtseinheit: Stochastik

Thema der Unterrichtsstunde: Punktschätzer – Das Taxiproblem

Name: Jens Bernheiden

Schule:

Schulleiter:

Seminarleiterin:

Studienleiterin:

Mentorin:

Klasse: 11

Stunde:

Datum:

1. Bemerkungen zur Lerngruppe: Anthropogene und soziokulturelle Voraussetzungen

2. Sachanalyse

In der Jahrgangsstufe 11 werden entsprechend des Rahmenplans die Themen Koordinatengeometrie, Stochastik, Funktionen und Zahlenfolgen unterrichtet.

Die Koordinatengeometrie ist abgeschlossen. In der Stochastik wurden bisher zufällige Ereignisse, diskrete Zufallsgrößen, die Binomialverteilung und Elemente der beurteilenden Statistik behandelt. Die letzte Thematik beinhaltete u.a. den einseitigen und den zweiseitigen Signifikanztest.

Eine Leistungskontrolle zu den Signifikanztests erfolgte in der vorangehenden Unterrichtsstunde. In dieser Stunde soll ein mathematischer Exkurs zu Punktschätzern erfolgen. Dieser Exkurs soll die Stochastik in der Jahrgangsstufe 11 abschließen. Danach werden Zahlenfolgen und Konvergenz im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens stehen.

Im Gegensatz zu statistischen Tests, die eine Ja/Nein – Entscheidung über die Gültigkeit einer Hypothese treffen, liefern Schätzer einen Wert bzw. ein Intervall, in dem der zu bestimmende Parameter liegt. Die Aufgabe von Schätzungen besteht darin, einen Parameter π der Grundgesamtheit aus den Informationen einer Stichprobe möglichst genau zu ermitteln.

Es gibt zwei Typen von Schätzern: Intervallschätzer und Punktschätzer. Ein Intervallschätzer liefert ein Konfidenzintervall, welches alle Werte π_0 des Parameters π enthält, für die die Nullhypothese $H_0: \pi = \pi_0$ bei der vorliegenden Stichprobe auf dem Signifikanzniveau α akzeptiert wird. Dagegen erhält man bei einem Punktschätzer nur einen Wert π_0 .

Ein *Schätzer* $\pi_0 = \pi_0(x)$ ist eine Funktion, die jeder Stichprobe x vom Umfang n einen Parameterwert zuordnet: π_0 : Stichprobenraum \rightarrow Parameterraum.

Einen relativ einfachen Zugang zum allgemeinen Prinzip von Punktschätzern liefert das Maximum – Likelihood – Prinzip (ML-Prinzip).

Als Likelihood des Parameters π bei der vorliegenden Stichprobe $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ definiert man die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe x beobachtet wird, wenn π der wahre Parameter der Grundgesamtheit ist: $L_x(\pi) = P(x | \pi)$.

Das Likelihood ist als Funktion von π im mathematischen Sinn keine Wahrscheinlichkeit, da $L = L(\pi)$ bei fester Stichprobe x betrachtet wird. Insbesondere ist im allgemeinen $\int L(\pi) d\pi \neq 1$.

Man sucht nun nach dem Parameterwert π_0 , der $L_x(\pi)$ bei der beobachteten Stichprobe x maximiert, für den die Stichprobe also am wahrscheinlichsten wird.

Beim zu behandelnden Taxiproblem werden n Taxis mit den Nummern x_1, x_2, \dots, x_n ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$) beobachtet, wobei sich N von 1 bis N durchnummerierte Taxis in der Stadt befinden. Geschätzt werden soll die unbekannte Anzahl N der Taxis in der Stadt. Man geht von einer Gleichverteilung aus. Sicher ist, dass $N \geq x_n$ gilt.

$$\text{Für } n = 1 \text{ liefert der ML-Schätzer: } L_x(\pi) = P(x_1 | N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \Leftrightarrow N \geq x_1 \\ 0 & \Leftrightarrow N < x_1 \end{cases}$$

Für $N = x_1$ ist $P(x_1 | N) = \frac{1}{x_1}$. Jeder größere Wert für N führt zur Verkleinerung des Likelihoods, da N Nenner des

Bruches $\frac{1}{N}$ ist. Für $N < x_1$ gilt außerdem $L_x(\pi) = 0$. Deshalb ist nach dem ML-Prinzip die Nummer des gesichteten Taxis der Schätzwert für die Anzahl der Taxis in der Stadt: $N_0 = x_1$.

$$\text{Für beliebiges } n \text{ ergibt sich: } L_x(\pi) = P(x_1; x_2; \dots; x_n | N) = \begin{cases} \frac{1}{\binom{N}{n}} & \Leftrightarrow N \geq x_n \\ 0 & \Leftrightarrow N < x_n \end{cases}$$

Für $N < x_n$ ist $L_x(\pi) = 0$, für $N = \max(x_1; x_2; \dots; x_n) = x_n$ ist $P(x_1; x_2; \dots; x_n | N) = \left(\frac{x_n}{n}\right)^{-1}$. Jeder größere Wert für N

führt zur Verkleinerung von $L_x(\pi)$, da für $x_i > x_j$

$$\left(\frac{x_i}{n}\right)^{-1} = \frac{n!(x_i - n)!}{x_i!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{x_i \cdot (x_i - 1) \cdot \dots \cdot (x_i - n + 1)} < \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{x_j \cdot (x_j - 1) \cdot \dots \cdot (x_j - n + 1)} = \frac{n!(x_j - n)!}{x_j!} = \left(\frac{x_j}{n}\right)^{-1} \text{ gilt.}$$

Das ML-Prinzip liefert also die höchste beobachtete Taxinummer als Schätzwert für die Anzahl der Taxis in der Stadt: $N_0 = x_n$. Das ist natürlich kein befriedigendes Ergebnis für das Taxiproblem, da man nicht davon ausgehen kann, dass genau die höchste Taxinummer gesichtet wird. Deshalb sei hier eine Übersicht über mögliche Schätzer mit kurzen Begründungen aufgeführt:

- $N_0 = x_n$
(Nach dem ML-Prinzip ist das Maximum der gesichteten Taxinummern gleich der Anzahl der Taxis.)
- $N_1 = x_n + \frac{(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})}{n-1} - 1 = x_n + \frac{(x_n - x_1)}{n-1} - 1$ für $n \geq 2$
(Der mittlere Abstand zwischen den gesichteten Taxis ist auch zwischen der größten beobachteten Taxinummer und der Anzahl der Taxis zu erwarten.)
- $N_2 = x_n + x_1 - 1$
($x_1 - 1$ Taxis mit den Nummern $x_1 < x_1$ wurden nicht gesehen, also fehlt die gleiche Anzahl mit Nummern $x_i > x_n$.)
- $N_3 = x_n + \frac{(x_1 - 1) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})}{n} - 1 = x_n + \frac{x_n - 1}{n} - 1 \approx x_n \frac{n+1}{n} - 1$
(Die Überlegung ist ähnlich der bei N_1 . Der mittlere Abstand zwischen den gesichteten Taxis einschließlich des Abstandes des Taxis mit der kleinsten Nummer zur Eins, ist auch zwischen der größten beobachteten Taxinummer und der Anzahl der Taxis zu erwarten.)
- $N_4 = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - 1$
(Die mittlere Taxinummer liegt genau in der Mitte der Taxianzahl. Der Mittelwert ist die mittlere Taxinummer.)

$$\bullet \quad N_5 = \begin{cases} 2 \cdot \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+2}{2}}}{2} - 1 & \Leftrightarrow n \text{ gerade} \\ 2 \cdot x_{\frac{n+1}{2}} - 1 & \Leftrightarrow n \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+2}{2}} - 1 & \Leftrightarrow n \text{ gerade} \\ 2 \cdot x_{\frac{n+1}{2}} - 1 & \Leftrightarrow n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Die mittlere Taxinummer liegt genau in der Mitte der Taxianzahl. Der Median ist die mittlere Taxinummer.)

Bei N_1 , N_3 , N_4 und N_5 wurde jeweils 1 subtrahiert, damit der Schätzer im Fall $n = N$ (alle Taxis wurden gesehen) den wahren Wert ermittelt.

Welche Eigenschaften sind geeignet, einen Vergleich zwischen den Schätzern zu versuchen?

Wenn ein Schätzer den wahren Wert im Mittel richtig bestimmt, dann heißt er erwartungstreu. Für jeden festen Parameterwert π gibt es eine entsprechende Verteilung der Stichproben P_π auf dem Stichprobenraum.

Der Schätzer π_0 heißt *erwartungstreu*, wenn für jedes π gilt: $E(\pi_0) = \pi$. Der Erwartungswert $E(\pi_0)$ bezieht sich hierbei auf P_π .

Der *mittlere quadratische Fehler* eines Schätzers ist definiert als $E((\pi_0 - \pi)^2)$, wieder bezüglich aller möglichen Stichproben vom Umfang n .

Der systematische Fehler (*Bias*) eines Schätzers ist $(E(\pi_0) - \pi)^2$.

Der mittlere quadratische Fehler setzt sich aus der Varianz und dem systematischen Fehler zusammen: $E((\pi_0 - \pi)^2) = E((\pi_0 - E(\pi_0))^2) + (E(\pi_0) - \pi)^2$. Bei einer erwartungstreuen Schätzung π_0 ist der mittlere quadratische Fehler demnach gleich der Varianz von π_0 .

Ein Schätzer π_0 heißt *robust*, wenn er unempfindlich gegenüber Ausreißern innerhalb der Stichprobe ist, also nicht zu stark von der Größe einzelner Werte abhängt. Die Sensitivität bzgl. eines Ausreißers wird durch die folgende Funktion $f(x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; x_{\text{Ausreißer}}) = n \cdot (\pi_0(x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; x_{\text{Ausreißer}}) - \pi_0(x_1; x_2; \dots; x_{n-1}))$ erfasst.

Im allgemeinen sind Schätzer unvergleichbar, da ihr Verhalten vom wahren Wert π abhängt. Es gibt aber eine untere Schranke für den Schätzfehler.

3. Didaktische Rechtfertigung

Die Rahmenrichtlinien für die Gymnasiale Oberstufe des Landes Mecklenburg – Vorpommern verlangt innerhalb des Themenbereiches Stochastik die Behandlung von Elementen der beurteilenden Statistik. Hierbei sollen das Grundproblem der beurteilenden Statistik, die Begriffe Grundgesamtheit und Stichprobe und das Aufstellen und Prüfen von Hypothesen im Vordergrund stehen. Dieser Lehrstoff wurde umfassend (Neben einseitigen Signifikanztests wurden auch zweiseitige Signifikanztests betrachtet. Der Grenzübergang der Binomialverteilung in die Normalverteilung wurde gestreift.) und mit zufriedenstellendem Ergebnis (Bei der letzten Leistungskontrolle wurde ein Notendurchschnitt von 2,6 erreicht.) unterrichtet.

Die Schülerinnen und Schüler sind für die Mathematik sehr aufgeschlossen. Im Vorwort des gültigen Rahmenplans heißt es, dass man „...dem unterschiedlichen Leistungsvermögen und den Interessen der Schüler gerecht werden...“⁽ⁱⁱⁱ⁾ sollte. Übermäßiges Trainieren fertiger Algorithmen würde das Leistungspotential der Klasse keineswegs ausschöpfen. Den Lernenden muss immer wieder aufgezeigt werden, dass die Mathematik kein sinnloses Anwenden von Lösungsverfahren ist, sondern für unzählige Bereiche des Lebens wertvolle Hilfsmittel liefert. „Der Unterricht der gymnasialen Oberstufe ist problemorientiert.“⁽ⁱⁱⁱ⁾ Das Erkunden verschiedener mathematischer Modelle sollte deshalb im Vordergrund des Unterrichts stehen.

Mit der Behandlung der Signifikanztests im Zusammenhang mit der Anwendung der Binomialverteilung haben die Lernenden ein wesentliches Modell kennen gelernt, mit dem man aufgrund einer Stichprobe Aussagen über Grundgesamtheiten tätigen kann. Die Gefahr liegt nahe, dass die Schülerinnen und Schüler die Binomialverteilung nun bei jedem beliebigen Problem der beurteilenden Statistik zu Rate ziehen wollen. Die Aufgabe der schließenden Statistik könnte von den Lernenden ausschließlich als Beurteilung von Hypothesen verstanden werden, was der Tragweite der induktiven Statistik nicht gerecht wird.

Die letzten Überlegungen lassen zwei wesentliche Vorgehensweisen zu:

- Man könnte einen weiteren Signifikanztest betrachten, der nicht mit Hilfe einer Binomialverteilung zu bewältigen ist.
- Man könnte einen Ausblick auf eine weitere Aufgabe der induktiven Statistik geben.

Die zweite Variante wurde gewählt, weil die hier notwendigen fachlichen Voraussetzungen niedriger einzustufen sind und weil die Schülerinnen und Schüler sich nun einige Zeit mit dem Testen von Hypothesen beschäftigt haben und deshalb mit einer Hypothese kaum zu motivieren sind. Außerdem trägt der gewählte Weg als Ausblick einen höheren Allgemeinheitsgrad, denn das Testen einer Hypothese, wenn auch mit einer anderen Verteilung, ist keine wesentlich neue Aufgabe, das Schätzen eines Parameters aufgrund einer gegebenen Stichprobe zeigt dagegen viel mehr neue Aspekte der Statistik auf.

„Die breite Anwendbarkeit der Mathematik muss im Unterricht der Schüler verdeutlicht und aus dem abstrakten und formalen Charakter der Mathematik, aus der Bereitstellung von Modellen und Methoden zur Sicherung, Verknüpfung und Weiterentwicklung dieser Modelle erklärt werden.“⁽ⁱⁱⁱ⁾

Das Taxiproblem ist als Punktschätzer – Exkurs besonders geeignet, da es auf einer einfachen, für jeden verständlichen Fragestellung beruht: „Man sieht in einer Stadt n Taxis und schreibt sich die Nummern auf. Die Taxis der Stadt seien von 1 bis N durchnummeriert. Wie viele Taxis gibt es in der Stadt?“

Das Verständnis eines Problems ist Grundvoraussetzung für dessen Bearbeitung.

Die gestellte Frage wird viele Schülerinnen und Schüler dieser Klasse sicher in der Hinsicht motivieren, dass sie wissbegierig sein werden, wie die Mathematik aufgrund der wenigen Daten verlässliche Aussagen machen will.

An dieser Stelle ist es möglich, auf den stochastischen Charakter der Antworten der schließenden Statistik aufmerksam zu machen. Die meisten Bereiche der Mathematik lassen nur „wahr“ oder „falsch“ zu. Gerade die Stochastik durchbricht dieses „Schwarz – Weiß – Denken“ und bringt den Wahrscheinlichkeitsbegriff mit ein. Den Schülerinnen und Schülern muss bewusst werden, dass man aus wenigen Daten nicht die ganze Wahrheit, aber eben doch mehr oder weniger verlässliche Aussagen herausholen kann.

Die Schwierigkeit, dass es keinen richtigen Lösungsweg gibt, führt zwanghaft dazu, dass mehrere Lösungen diskutiert werden müssen. Solche Untersuchungen fördern das logische Denkvermögen der Schülerinnen und Schüler meist mehr, als die Feststellung des Wahrheitsgehaltes einer einzigen Lösung.

Im Vordergrund der Stundenthematik soll nicht eine exakte mathematische Theorie (Definition, Satz, Beweis etc.) über Punktschätzer stehen. Begriffe wie ML-Prinzip, erwartungstreu usw. sollen, wenn überhaupt, nur beiläufig Erwähnung finden, denn wichtigstes Stundenziel ist, dass die Lernenden erkennen, dass die Mathematik nicht beim bisher betrachteten Schulwissen stehen bleibt, dass auch die Qualifikationsphase weitere interessante Gebiete berühren wird.

Die Möglichkeiten der Beantwortung der gestellten Frage, also die Arbeit am Problem, ohne auf die korrekte Anwendung neuer Fachtermini zu achten, ist zentraler Bestandteil der Unterrichtsstunde.

Der Lerngegenstand ist jedoch nicht nur vom beschriebenen übergreifenden Standpunkt her gesehen unterrichtenswert: Durch die Diskussion der allgemeinen Gleichungen der Schätzer, unterstützt durch ein konkretes Beispiel, besteht die Möglichkeit, das Abstraktionsvermögen der Lernenden zu schulen. Elementare Begriffe (Definition des Maximums und des Erwartungswertes) und das Umformen von komplexen algebraischen Gleichungen (Anwendung der Gaußschen Summenformel, Zusammenfassung von Termen, Ersetzung von Variablen, ...) können mit Hilfe der zu betrachtenden Schätzer wiederholt, geübt und gefestigt werden.

4. Angestrebtes Unterrichtsergebnis

- Die Schülerinnen und Schüler erfahren an einem Beispiel die Reichweite und Bedeutung der induktiven Statistik.
- Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Statistik Wahrscheinlichkeitsaussagen trifft.
- Die Schülerinnen und Schüler erwerben zunehmend die Fähigkeit, Probleme zu analysieren und nach verschiedenen Lösungswegen zu suchen.
- Die Schülerinnen und Schüler entwickeln die Fähigkeit, Lösungsvorschläge kritisch zu reflektieren und über Alternativen nachzudenken.
- Die Schülerinnen und Schüler erkennen die unterschiedlichen Aufgaben von Tests und Schätzungen.
- Die Schülerinnen und Schüler kennen Qualitätsmerkmale von Punktschätzern.

5. Überlegungen zur Methode

Die Stunde beginnt mit einer kurzen Zusammenfassung der behandelten Unterrichtseinheit Stochastik durch den Lehrenden. Auf den Ausblickscharakter dieser Stunde wird hingewiesen. Dies birgt die Gefahr in sich, dass die Arbeitsmoral einiger Schülerinnen und Schüler sinkt. Arbeitsphasen ohne Notendruck bieten jedoch auch die Möglichkeit, eine ungezwungene Arbeitsatmosphäre aufzubauen. Es ist in dieser Klasse damit zu rechnen, dass die meisten Schülerinnen und Schüler ihre konzentrierte Arbeitshaltung beibehalten (Die Tagesform einzelner Schüler kann bei dieser Hypothese natürlich nicht berücksichtigt werden.).

Nach der Stellung der beschriebenen Taxiaufgabe wird das Problem von den bisher betrachteten Signifikanztests abgegrenzt. Die leistungstärkeren Schülerinnen und Schüler sollen hier Gelegenheit erhalten, das Wesen statistischer Tests herauszustellen und das Taxiproblem in ein bisher noch nicht behandeltes Gebiet der Statistik einzuordnen. Dadurch wird einerseits den leistungsschwächeren Lernenden die Erfassung des Problems erleichtert, andererseits sind beide Schülergruppen in einer frühen Unterrichtsphase gefordert, sich mit der gestellten Frage zu beschäftigen (Die meisten leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler versuchen in der Regel sehr intensiv, Zusammenhänge zu erfassen, um nicht den Anschluss zu verlieren.). Würde man das Unterrichtsgespräch eher mit den unbegabteren Lernenden führen, wäre mit Unruhe seitens unterforderter Schüler zu rechnen, die im weiteren Unterrichtsverlauf erfahrungsgemäß am besten mit schriftlicher Arbeit zu beseitigen ist. Nach der Abgrenzung des Problems soll das Unterrichtsgespräch jedoch auf Lösungsvorschläge seitens der Schüler hinauslaufen. Eine schriftliche Arbeitsphase ist erst später eingeplant.

Die Schätzvorschläge der Schülerinnen und Schüler werden an der Tafel gesammelt. Das Tafelbild soll begleitend übernommen werden. Dies ist den Lernenden vertraut.

Es ist kaum vorhersagbar, wie viele gut begründete Vorschläge von den Schülerinnen und Schülern zusammengetragen werden. Eine Visualisierung auf dem Zahlenstrahl soll die Lernenden bei der Ideenfindung unterstützen. Die Quantität und Qualität der Schüleräußerungen wird bestimmen, wie stark der Unterrichtende das Unterrichtsgespräch steuert. Die aus der begründenden Idee resultierende allgemeine Definition des jeweiligen Schätzers fordert von den Lernenden Abstraktionsvermögen. Besonders bei der Berücksichtigung der Lücken zwischen den einzelnen Taxinummern sind Schwierigkeiten vorauszusehen. Gerade in dieser Klasse muss der Lehrende aus den schon angedeuteten Gründen jedoch auch immer die Leistungsstarken fordern.

Einzel- und Partnerarbeit sind für das Finden der Schätzer eher ungeeignet, da viele unterschiedliche Ideen gefragt sind. Außerdem wird das Problem unterschiedlicher Lösungsmöglichkeiten am Anfang noch nicht für jeden Lernenden erkenntlich sein. Eine Alternative wäre Gruppenarbeit, die jedoch an dieser Stelle wegen der erwähnten möglichen Auswirkungen nicht durchgeführt werden soll.

Das allgemeine Taxiproblem wird parallel durch ein Beispiel unterlegt. Dieses wird aber im weiteren Unterrichtsverlauf in den Hintergrund gedrängt, um das Abstraktionsvermögen der Lernenden zu schulen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen im folgenden feststellen, ob die Schätzer den wahren Wert bestimmen, wenn die Stichprobe alle Taxis umfasst und gegebenenfalls die Gleichungen abändern. Dies wird am Beispiel des ML-Schätzers vorgeführt. Die Klasse wird in zwei Gruppen geteilt. Die Einteilung soll im wesentlichen der Zeitersparnis dienen. Innerhalb der Gruppen sollen die Lernenden mit ihrem Sitzpartner zusammenarbeiten, weil die individuelle Hilfe durch die vertrauten Personen in der Regel gute Arbeitsergebnisse garantiert.

Die Resultate sollen im Anschluss an der Tafel von drei Lernenden vorgestellt werden, damit alle Schülerinnen und Schüler auf die nun veränderten Schätzer zugreifen können.

Die Schätzer sollen im weiteren von den Schülerinnen und Schülern unter Führung des Lehrenden dahingehend begutachtet werden, ob sie denn im Mittel den wahren Wert treffen. Dabei werden kleine Zahlen ($N=3$; $n=2$) verwendet, weil die Rechnung sonst größere Ausmaße annehmen würde. In diesem Zusammenhang wird vom Unterrichtenden auf den möglichen Einsatz des Computers hingewiesen, der beim realen Problem viel Rechenarbeit übernehmen könnte. Die Schülerinnen und Schüler erhalten durch den geplanten Unterrichtsgang an dieser Stelle nochmals die Gelegenheit, den Begriff des Erwartungswertes zu festigen, was vor allem den leistungsschwächeren Schülern zu Gute kommt. Je nach dem, wie weit die Unterrichtsstunde schon fortgeschritten ist, sollen hier alle oder nur ausgewählte Schätzer betrachtet, sollen die Berechnungen von den Schülern oder vom Lehrer durchgeführt werden.

Bleibt noch Zeit, können weitere Qualitätsmerkmale, wie etwa der quadratische Fehler oder die Robustheit eines Schätzers erforscht werden.

Als Quintessenz der Begutachtung der Qualitätsmerkmale soll am Ende der Stunde herausgestellt werden, dass Schätzer im allgemeinen unvergleichbar sind, weil der wahre Wert unbekannt ist.

Der Lerngegenstand ist eher geeignet, in einer Doppelstunde unterrichtet zu werden. Dies ist zu diesem Zeitpunkt aus organisatorischen Gründen leider nicht möglich. Beachtung sollte jedoch der Ausblickscharakter der Stunde finden. Es ist nicht notwendig, dass jede und jeder Lernende der Klasse alle Details des Bildungsinhaltes vollständig versteht. Der Unterrichtsstoff soll Anregungen bieten, Grenzen des bisherigen Wissens aufzeigen und Fernblicke auf weitere Gebiete der Statistik ermöglichen.

Alternativ zu den geplanten Schwerpunkten wäre es möglich, die zugrundeliegende Annahme der Gleichverteilung der Taxinummern in den Vordergrund zu rücken. Fragen wie „Welche Annahmen müssen getroffen werden, um im Laplace – Modell weiterdenken zu können?“ würden bei einem solchen Vorgehen untersucht werden müssen. Derartige Betrachtungen sind wichtig, wurden aber an anderen Stellen innerhalb der Unterrichtseinheit schon oft durchgeführt.

6. Verlaufsplanung

Zeit	Inhalt	Methoden	Medien und Hilfsmittel
7:45	Stellung und Einordnung des Taxiproblems	LV, UG	Tafel
7:50	Mögliche Schätzer für das Taxiproblem	UG	Tafel; Zahlenstrahl
8:05	Abänderung der Schätzer	EA, PA	
8:15	Zusammentragen der Ergebnisse	SV, UG	Tafel
8:20	Erwartungstreue der Schätzer	UG/LV	Tafel
8:28	Vergleichbarkeit von Schätzern	LV	
8:30	Ende der Stunde		

Abbruchmöglichkeiten und Alternativen

- Die Erwartungstreue der Schätzer wird nicht untersucht. Mögliche Qualitätsmerkmale werden erwähnt.
- Statt der Erwartungstreue wird die Robustheit einiger Schätzer analysiert.

- Weitere Qualitätsmerkmale (Quadratischer Fehler, Robustheit) werden untersucht.
- Andere mögliche Schätzer finden Beachtung.

7. Literatur und Medien

- i. Prof. Dr. Bandt: Vorlesung Mathematische Statistik; Greifswald WS 1998/99
- ii. Autorenkollektiv: Lambacher – Schweizer 11 Baden-Württemberg; Klett; Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig 2000
- iii. Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik Mecklenburg-Vorpommern Klassenstufe 11-13

8. Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen

- LVLehrervortrag
- UGUnterrichtsgespräch
- EASchülereinzelarbeit
- PASchülerpartnerarbeit

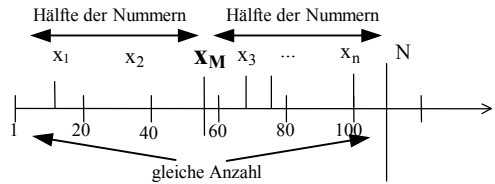
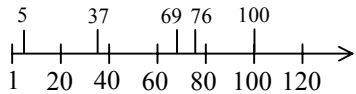
9. Tafelbild

Das Taxiproblem

Die Taxis einer Stadt seien von 1 bis N durchnummeriert. Jemand sieht n Taxis mit den Nummern $x_1; x_2; \dots; x_n$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$). Man schätze die unbekannte Anzahl N der Taxis.

Beispiel:

Jemand sieht 5 Taxis mit den Nummern 5; 37; 69; 76 und 100.



Schätzer

$N_1 = x_n$

„Sicher ist: $N \geq \text{Maximum}$ “

$N_2 = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

„Die doppelte Mitte ergibt den rechten Rand.“

$N_3 = x_n + (x_1 - 1)$ „Lücke rechts = Lücke links“ $N_3 = 104$

$N_4 = x_n + \frac{(x_1 - 1) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})}{n}$ $N_4 \approx 120$

$= x_n + \frac{(x_n - 1)}{n}$ „Lücke rechts = durchschnittliche Lücke“

Beispiel

$N_1 = 100$

$N_2 = 2 \cdot 57,4 \approx 115$

$N_3 = 104$

$N_4 \approx 120$

alle Taxinummern beobachtet:

$n = N; x_1=1; x_2=2; \dots; x_n=N$

$N_1 = N$

$N_2 = 2 \cdot \frac{1+2+\dots+N}{N} = 2 \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2N} = N+1$

$\Rightarrow N_2' = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - 1$

$N_3 = N + (1-1) = N$

$N_4 = N + \frac{(N-1)}{N} = N + 1 - \frac{1}{N} \approx N+1$

$\Rightarrow N_4' = x_n + \frac{(x_n - 1)}{n} - 1$

Treffen die Schätzer im Mittel den wahren Wert?

Beispiel: $N = 3; n = 2$

mögliche Stichproben	N_1	N_2'	N_3	N_4'
1 2	2	2	2	$\frac{3}{2}$
1 3	3	3	3	3
2 3	3	4	4	3
Erwartungswert $E(N_0)$	$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$	3	3	$\frac{15}{2 \cdot 3} = 2\frac{1}{2}$