

Lehrprobe im Fach Mathematik

Thema der Unterrichtseinheit: Differentialrechnung

Thema der Unterrichtsstunde: Ableitung trigonometrischer Funktionen

Name: Jens Bernheiden
Schule:
Schulleiter:
Seminarleiterin:
Studienleiterin:
Mentorin:
Klasse: 12 LK
Stunde:
Datum:

1. Rahmenbedingungen

2. Sachanalyse

Der Leistungskurs in der Jahrgangsstufe 12 beschäftigt sich mit der *Infinitesimalrechnung*.

Zu Beginn des Schuljahres wurden die *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit* von Funktionen thematisiert. Im Anschluss wurden *Ableitungsregeln* (Konstantenregel, Summenregel, Faktorregel, Produktregel, Allgemeine Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Umkehrregel) behandelt. Die Schüler können bereits Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen differenzieren.

In der vorangehenden Unterrichtsstunde wurden grundlegende Eigenschaften von Winkelfunktionen wiederholt, in dieser Stunde soll die Ableitungsfunktion von $\sin x$ hergeleitet werden.

In der folgenden Unterrichtszeit kann dann nach erfolgter Festigung der Ableitungsregeln, auch im Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen, zu Anwendungen der Differentialrechnung übergegangen werden.

Die Funktionen $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ und beliebige verkettete trigonometrische Funktionen lassen sich mit Hilfe von $\sin x$ schreiben. Die Kenntnis der Ableitung der Sinusfunktion reicht somit aus, um beliebige trigonometrische Funktionen differenzieren zu können.

$\sin x$ und $\cos x$ sind auf dem Definitionsbereich der reellen Zahlen definiert und dort überall stetig, $\sin x$ ist eine *ungerade*, $\cos x$ eine *gerade* Funktion. Es gelten die *Additionstheoreme*.¹

Die Kreisfunktionen können am Einheitskreis *geometrisch* definiert werden.² Die angedeuteten Eigenschaften stützen sich dann jedoch auf den nicht elementaren Begriff der *Länge eines Kurvenstücks*. Günstiger erscheint deshalb eine *rein analytische* Definition, etwa über die Lösung der *Differentialgleichung* $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ oder mit Hilfe einer *Reihenentwicklung*.

Wählt man den zweiten Weg, sind $\sin x$ und $\cos x$ durch folgende *konvergente Potenzreihen* definiert:

- $\sin x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$
- $\cos x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$

¹ Vgl. Heuser 1998, 274.

² Für spitze Winkel kann die Definition auch am rechtwinkligen Dreieck erfolgen. Außerdem ist eine geometrische Definition mit Hilfe einer Kreissektorfläche möglich.

Die Potenzreihen kann man gliedweise differenzieren und man erhält für die Ableitungen der beiden Winkelfunktionen:

- $\sin' x := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$
- $\cos' x := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2k) \frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin x$

Für die innerhalb der Unterrichtsstunde zur Ableitung benötigten Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ und

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ ergibt sich mit Hilfe der Potenzreihen:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = 0$

Die Schulmathematik führt die Winkelfunktionen auf geometrischem Wege ein. Für den Grenzwert

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ wird deshalb der *Grenzwertsatz über die Einschließung* benötigt:

Grenzwertsatz über die Einschließung:

Wenn die Werte einer Funktion $f(x)$ zwischen den Werten zweier anderer Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ eingeschlossen sind ($g(x) \leq f(x) \leq h(x)$) und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ gilt, dann ist auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g .$$

3. Didaktische Rechtfertigung

Der Rahmenplan für die Gymnasiale Oberstufe des Landes Mecklenburg-Vorpommern verlangt innerhalb des Themenbereiches „Differentialrechnung“ die Behandlung der Ableitungen der Winkelfunktionen.

Trigonometrische Funktionen spielen im Zusammenhang mit Schwingungen und Wellen eine bedeutende Rolle. Einige Schüler dieses Kurses werden sicherlich ein Studium mit naturwissenschaftlicher Ausrichtung in Angriff nehmen. Die Behandlung der Winkelfunktionen innerhalb der Differentialrechnung ist daher nicht nur für innermathematische Bezüge wichtig.

Das gewählte Vorgehen zum Ableiten der Sinusfunktion erfordert die Verbindung von mehreren Teilbereichen der Schulmathematik und trägt damit zur Festigung von früher erworbenen Kompetenzen bei: Die trigonometrischen Funktionen werden am Einheitskreis gedeutet, die Additionstheoreme werden angewendet, der sichere Umgang mit Termen wird geübt. Außerdem können mathematische Sachverhalte, die seit dem Beginn des Schuljahres thematisiert wurden, wie etwa die Berechnung von Grenzwerten, die geometrische Interpretation des Differentialquotienten, die Ableitungsfunktion, das geometrische Differenzieren, das Ableiten mit Hilfe des Differentialquotienten und die Ableitungsregeln gefestigt werden.

Beweise verdeutlichen die Exaktheit der Mathematik. Gerade in einem Leistungskurs sollten die Schüler lernen, wie Mathematiker effizient beweisen. Der gewählte Beweis für $\sin'x = \cos x$ verdeutlicht, dass man auf grundlegende Definitionen zurückgeht und Verbindungen zu anderen Teilbereichen der Mathematik herstellt, um Beweislücken zu schließen. $\cos'x = -\sin x$ kann auf analogem Wege oder aber durch Anwendung der Ableitungsregeln aus der Ableitungsfunktion von $\sin x$, also mittels Zurückführung auf schon bekannte Sätze, gewonnen werden. Eine Diskussion unterschiedlicher Vorgehensweisen bietet sich an.

Zur Ableitung der Sinusfunktion wird der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ benötigt, der mit Hilfe von geometrischen Betrachtungen am Einheitskreis berechnet werden soll. Die Ungleichung $\sin x \cos x \leq x \leq \tan x$ wird anschaulich aus dem Vergleich von Flächen hergeleitet. Die Sinusfunktion wird geometrisch mit einer Computersimulation abgeleitet. Anschauung und abstrakte Rechnung können eng verbunden werden. Vorteile von Computersimulationen werden deutlich.

4. Angestrebtes Unterrichtsergebnis

- Die Schüler kennen die Ableitungsfunktion von $\sin x$ und können beweisen, dass $\sin' x = \cos x$ gilt.
- Die Schüler verbinden abstrakte Rechnungen eng mit der visuellen Anschauung. Dabei erkennen und schätzen sie Vorteile von Computersimulationen.
- Die Schüler werden bei der Ableitung von Funktionen und bei der Umformung von Termen sicherer.
- Die Schüler erwerben zunehmend die Fähigkeit, Beweise innerhalb der Differentialrechnung zu führen und erkennen Vorteile von Beweisverfahren, die bekannte Sätze und Regeln möglichst effizient nutzen.
- Die Schüler entwickeln zunehmend die Kompetenz, innermathematische Probleme zu analysieren, nach verschiedenen Lösungswegen zu suchen und kritisch über alternative Lösungsvorschläge zu reflektieren.

5. Überlegungen zur Methode

Die Differentialrechnung als mächtiges Instrument der Analysis, die ein gesamtes Halbjahr im Leistungskurs der Jahrgangsstufe 12 einnimmt, muss von Anfang an hinreichend gut motiviert werden. Deshalb erscheint es ratsam, vor allem mit praxisnahen Erscheinungen Motivationshilfen zu geben. So böte sich z.B. an, mit der Darstellung einer Tonschwingung in die Ableitung der trigonometrischen Funktionen einzuführen. In dieser Stunde soll über die praktischen Bedeutungen der Ableitungen von Winkelfunktionen aus folgenden Gründen dennoch nicht reflektiert werden:

Der Differentialquotient wurde gestützt durch die innermathematische geometrische Interpretation aus dem Problem der Bestimmung der Momentangeschwindigkeit beim Freien Fall hergeleitet. Die Ableitungsfunktion wurde am Beispiel einer beschleunigten Bewegung in Verbindung mit einem realen Experiment (Schiefe Ebene) eingeführt. Die Schüler erfassten bereits exemplarisch die Bedeutung der Differentialrechnung in der Physik. Dieser Leistungskurs ist der Mathematik so aufgeschlossen, dass eine innermathematische Motivation ausreichend erscheint. „Aufgesetzte“ Motivationen, die nicht tiefgründig genug mit den mathematischen Sachverhalten verbunden sind oder ungenügende „Aha-Effekte“ in sich bergen, wirken sich auf den Unterricht eher negativ aus. Die Ableitung einer Ort-Zeit-Funktion wäre für die Schüler prinzipiell nicht neu, andere Phänomene, wie etwa eine Welle, würde einen Großteil der Schüler auf physikalischem Gebiet überfordern.³

Die Unterrichtsstunde wird daher ohne Umschweife mit einer Zielorientierung begonnen. Am Anfang der Stunde sollen die Schüler begründete Vermutungen über den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion von $\sin x$ aufstellen. Die Vermutungen sollen möglichst nur aus dem Betrachten des Verlaufs des Anstiegs von $\sin x$ gezogen werden, damit nochmals die Verbindung zwischen Funktion und Ableitungsfunktion deutlich wird. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass ein Lernender die Ableitung von $\sin x$ schon kennt. Falls sofort das richtige Ergebnis genannt wird, soll nur die Begründung im Vordergrund stehen.

Zur Bestätigung bzw. Widerlegung der Vermutungen wird die Sinusfunktion geometrisch abgeleitet. Hier wäre es möglich gewesen, die Schüler selbständig einige Punkte der Funktion bearbeiten zu lassen. Das zeitraubende Vorgehen würde jedoch auch nur wieder in einer Vermutung enden – die ersten Überlegungen der Stunde würden sinnlos erscheinen. Außerdem wurde das geometrische Ableiten bereits zur Genüge thematisiert, so dass die Schüler kaum mit Lust die innerhalb des Kurses eher ungeliebte saubere exakte Zeichnung anfertigen werden. Will man diesen begabten Schülern die vielen Facetten der Mathematik nahe bringen, muss man sich ihre Schwächen⁴ zu Nutze machen. Es bietet sich an, die Vorteile einer Computersimulation deutlich

³ Nur sieben Schüler belegen einen Physikkurs.

⁴ Hier ist das ungeliebte saubere Arbeiten gemeint, dass in dieser Altersstufe schlecht mit einer großen Anzahl gleichartiger Aufgaben geübt werden kann. Die Schüler wissen, wie man ordentliche Zeichnungen anfertigt – ob sie es in dem einen oder anderen Fall tun, liegt ganz bei ihnen selbst. Die Vorteile exakter Arbeitsweisen kann man eher durch Verweise auf unnötig entstandene Fehler aufzeigen.

werden zu lassen. Die Festigung des Vorgehens beim geometrischen Ableiten wird nun dadurch gesichert, dass die Schüler die Konstruktion beschreiben müssen. Die gewählte Simulation ist in Bezug auf den Abstraktionsgrad eher für Grundkurse geeignet, viele Schüler des Kurses werden durch die geometrische Ableitung fachlich nicht genügend gefordert. Die Simulation trägt jedoch gerade für diese Schüler einen motivierenden Aspekt, indem sie einige zum Programmieren angespornt.

Nachdem auf geometrischem Wege herausgestellt wurde, dass $\sin'x = \cos x$ gilt, soll ein Beweis folgen, der gerechtfertigt bleibt, weil die Computersimulation die Kenntnis der Ableitungsfunktion von $\sin x$ benutzt. Der Differentialquotient wird gemeinsam aufgestellt und soweit umgeformt, dass die Wissenslücken klar erkennbar sind. Dabei soll es den Schülern vorbehalten bleiben, ob sie den Differenzenquotienten in der Form $d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ oder $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ benutzen.⁵

Zum Beseitigen der Beweislücke $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = ?$ wird den Schülern die Herleitungsidee gegeben. Es wäre sicherlich schön, wenn der Grenzübergang ohne Hilfestellung bewältigt werden könnte. Dies erscheint jedoch unrealistisch. Das Prinzip der minimalen Hilfe⁶ wird an dieser Stelle auf Grund der zur Verfügung stehenden Zeit nicht eingehalten werden können. Innerhalb einer Doppelstunde oder in Verbindung einer vorbereitenden Hausaufgabe wäre dies sicher möglich gewesen, jedoch hätte eine Hausaufgabe vorausgesetzt, dass der Nutzen des Grenzwertes im Vorfeld besprochen wurde.⁷ Hier soll absichtlich der Weg beschritten werden, erst Lücken innerhalb eines Beweises festzustellen um sie dann zu beseitigen. Das erfordert von den Lernenden eine höhere Auffassungsgabe, denn der eigentliche Beweis wird durch eine Nebenrechnung unterbrochen, liegt jedoch näher am prinzipiellen Vorgehen von Mathematikern.⁸

Nachdem die Beweisidee geklärt ist, sollen die Schüler den Beweis selbständig durchführen. Anschließend ist geplant, einen Jugendlichen an der Tafel vorrechnen zu lassen.

Der Einstieg über das beschriebene Unterrichtsgespräch hat den Vorteil, dass alle Schüler das Problem vollständig erfassen. Die exakte Durchführung des Beweises wird an die meisten Lernenden genügend hohe Anforderungen stellen. Es lässt sich schwer abschätzen, wie schnell der einzelne Schüler den gesamten Beweis führen kann. Die Unterrichtsplanung lässt außerdem offen, ob der Differenzenquotient in x oder h geschrieben wird. Der erste erfordert nur die Kenntnis von

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, der zweite jedoch weiter noch die Berechnung von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$. Der Grenzwert

⁵ Ein Aufgreifen der Lösungsvorschläge wird in diesem Kurs besonders dankbar angenommen.

⁶ Man könnte nur auf den Einheitskreis verweisen.

⁷ Man hätte den Grenzwert auch bei der Behandlung von Grenzwerten von Funktionen am Anfang des Schuljahres berechnen können. Die trigonometrischen Funktionen wurden jedoch in diesem Zusammenhang nicht thematisiert.

⁸ Innerhalb eines leistungsschwächeren Kurses sollte man eine solche Nebenrechnung eher im Vorfeld durchführen.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ lässt sich mit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ bestimmen. Die noch zur Verfügung stehende Unterrichtszeit wird maßgebend für die Entscheidung sein, ob dieser Grenzwert von den Schülern selbst berechnet, ihnen mitgeteilt⁹, oder vom Lehrenden vorgerechnet wird. Weiterhin wird sich erweisen, ob die Ableitungsfunktion von $\cos x$ noch am Ende der Stunde hergeleitet wird. Als mögliche Alternativen bieten sich hier an:

- Die Schüler leiten $\cos x$ selbständig ab.¹⁰ Das Ergebnis wird genannt bzw. an der Tafel hergeleitet. Unterschiedliche Vorgehensweisen werden diskutiert.
- Mit den Schülern werden unterschiedliche Vorgehensweisen zur Ableitung von $\cos x$ diskutiert. Die Schüler führen die Ableitung am Ende der Stunde durch oder ein Schüler differenziert $\cos x$ an der Tafel.
- Mit den Schülern werden unterschiedliche Vorgehensweisen zur Ableitung von $\cos x$ diskutiert. Die Schüler führen die Ableitung zu Hause oder innerhalb der nächsten Stunde durch.

In der folgenden Mathematikstunde und zu Hause sollen verkettete Sinusfunktionen differenziert werden, damit die Schüler die weitreichende Bedeutung des Beweises erkennen, denn mit der Ableitungsfunktion von $\sin x$ ist es nun möglich, eine ganze Funktionenklasse zu differenzieren.

Im Unterricht wird der Computer in zweifacher Weise verwendet: zur Simulation der geometrischen Ableitung und zur Visualisierung des Einheitskreises mit den zu betrachtenden Flächen. Während für die Simulation ein Computer unabdingbar ist, hätte man den Einheitskreis auch auf Folie darstellen können. Dieser Medienwechsel könnte jedoch Unruhe in den Unterrichtsverlauf bringen. Deshalb wurde auch der Einheitskreis in das Computerprogramm integriert. Zur besseren Sichtbarkeit wird das Monitorbild an die Wand projiziert.

Die Schüler erhalten ein Arbeitsblatt mit der Sinusfunktion und dem Einheitskreis. Dadurch soll neben einer Erleichterung der Arbeit erreicht werden, dass jeder Schüler eine ordentliche saubere Skizze zum späteren Nacharbeiten im Heft hat.

Die Schüler sollen kritikfähiger werden. Deshalb werden an der Tafel geführte Berechnungen und Gedankengänge innerhalb der Gruppe besprochen. Bisher verliefen solche Diskussionen sehr offen, kaum ein Schüler hatte Scheu, seine Meinung kund zu tun. Es kann jedoch sein, dass die Anwesenheit „fremder“ Personen diese wertvolle Unterrichtsatmosphäre beeinträchtigt.

⁹ In diesem Fall erhalten die Schüler die Berechnung des Grenzwertes als Hausaufgabe.

¹⁰ Diese Aufgabe kann auch schon als Zusatzaufgabe bei der Ableitung von $\sin x$ gestellt werden.

6. Verlaufsplanung

Zeit	Inhalt	Methoden	Medien und Hilfsmittel
10:55	Zielorientierung Verlauf des Graphen von $\sin'x$ Geometrisches Ableiten von $\sin x$	LV, UG	Tafel, AB, Computer, Beamer
11:05	Aufstellen des Differentialquotienten Feststellen von Beweislücken Hinweise zur Grenzwertbildung	UG, LV	Tafel, AB, Computer, Beamer
11:15	Durchführen des Beweises: $\sin'x = \cos x$	EA	AB
11:30	Vorführen des Beweises	SV	Tafel
11:35	Ableiten von $\cos x$	UG	Tafel, Computer, Beamer
11:40	Ende der Stunde		

Hausaufgabe: Ableiten verketteter Sinusfunktionen

Abbruchmöglichkeiten und Alternativen

- Alternativen bei der Ableitung von $\cos x$ sind in der Methodische Analyse aufgeführt.
- Am Ende der Unterrichtsstunde werden einzelne verkettete Funktionen abgeleitet.

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen


- AB Arbeitsblatt
- EA Schülereinzelarbeit¹¹
- LV Lehrervortrag
- SV Schülervortrag
- UG Unterrichtsgespräch

¹¹ Innerhalb des Unterrichts sind bei der Einzelarbeit Hilfen von Mitschülern meist gestattet. Strenge selbständige Schülerarbeit wird insbesondere dann gefordert, wenn die erbrachten Leistungen benotet werden sollen.

7. Literatur und Medien

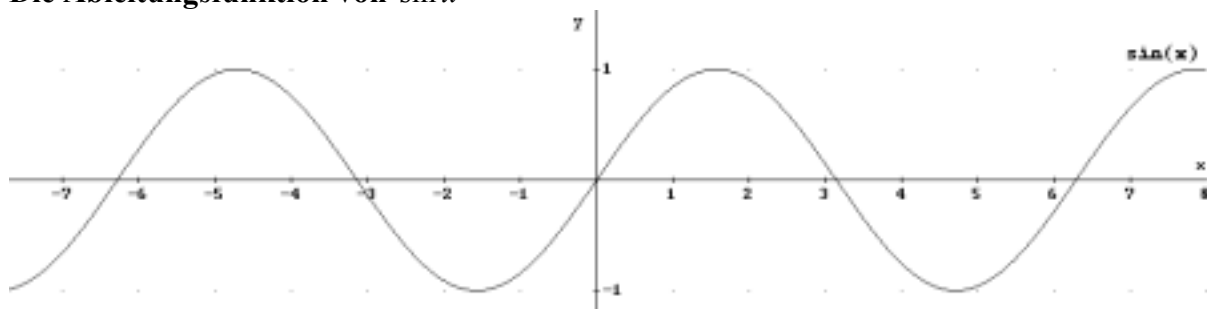
- Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern (Hrsg.): *Rahmenplan* für das Gymnasium: *Sekundarstufe II*. Mathematik. **1999**.
- *Heuser*, Harro: Lehrbuch der Analysis Teil 1. 12. Auflage. Leipzig: Teubner, **1998**.
- *Weber*, Karlheinz; *Zillmer*, Wolfgang: Mathematik Leistungskurs: Analysis Analytische Geometrie Stochastik Sekundarstufe II. Berlin: Paetec, **1996**.
- *Weber*, Karlheinz; *Zillmer*, Wolfgang: Mathematik Aufgabenbuch Leistungskurs: Analysis Analytische Geometrie Stochastik Sekundarstufe II. Berlin: Paetec, **1997**.

8. Auszüge des möglichen Tafelbildes

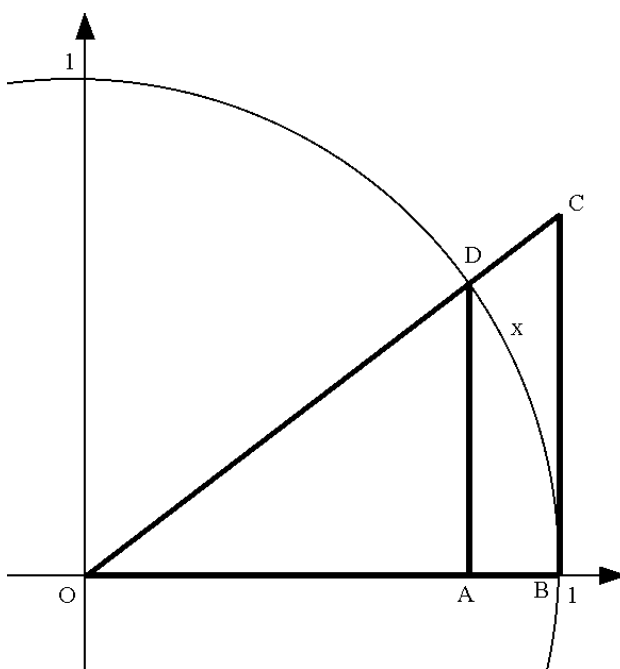
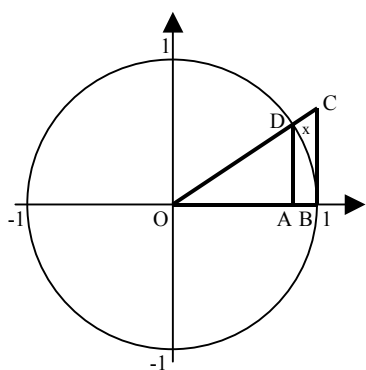
<p>Ableitung von $f(x) = \sin x$</p> $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0}$ $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}$ $= \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$	$= \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$ $= \cos(x_0) \cdot 1$ $= \cos(x_0)$	<p>Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (Berechnung für $0 < x < \frac{\pi}{2}$)</p> $A_{\triangle OAD} \leq A_{\widehat{OBD}} \leq A_{\triangle OBC}$ $\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$ $\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ $\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ $1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
<p>Die Ableitung von $f(x) = \sin x$</p> 			

9. Anhang

Die Ableitungsfunktion von $\sin x$



Der Einheitskreis



Die Ableitungsfunktion von $\cos x$

