

Lehrprobe im Fach Mathematik

Thema der Unterrichtseinheit: Differentialrechnung

Thema der Unterrichtsstunde: Die Ableitungsfunktion und ihre Bedeutung am Beispiel einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Name: Jens Bernheiden
Schule:
Schulleiter:
Seminarleiterin:
Studienleiterin:
Mentorin:
Klasse: 12 LK
Stunde:
Datum:

1. Rahmenbedingungen

2. Sachanalyse

Der Leistungskurs in der Jahrgangsstufe 12 beschäftigt sich mit der Infinitesimalrechnung.

Zu Beginn des Schuljahres wurden Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen thematisiert; u.a. wurden Grenzwerte berechnet, die Grenzwertsätze für Funktionen aus den für Folgen abgeleitet, der Nullstellensatz von Bolzano, der Zwischenwertsatz von Bolzano und der Satz vom Maximum und Minimum behandelt. Im Anschluss wurden der Differenzenquotient und der Differentialquotient eingeführt, erste Funktionen lokal differenziert und der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit an einer Stelle erörtert.

In dieser Unterrichtsstunde soll die Ableitungsfunktion definiert und ihr Zusammenhang zur Ursprungsfunktion untersucht werden. Außerdem soll den Schülern am Beispiel der gleichmäßig beschleunigten Bewegung deutlich gemacht werden, welche bedeutende Stellung die Ableitungsfunktion, und damit die Differentialrechnung in den Naturwissenschaften einnimmt.

Bei der Untersuchung von Funktionen kommt es oft weniger darauf an, die Funktionswerte an bestimmten Stellen zu kennen. Wichtiger ist meist die Kenntnis darüber, wie sich die Funktionswerte verändern, wenn man die Argumente

leicht variiert. Der Differenzenquotient $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ mit $x \neq x_0$ vergleicht die Änderung einer Funktion f an der

Stelle x_0 , also die Differenz $f(x) - f(x_0)$, mit der Änderung der Funktion $g(x) = x$. Der Differenzenquotient hängt neben

der Variablen x noch von der betrachteten Stelle x_0 , also von zwei Variablen ab. Dieser Schwierigkeit kann man entgegenwirken, indem man die Veränderliche x durch einen Grenzübergang eliminiert: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definition: Es sei f eine auf D_f definierte Funktion und $x_0 \in D_f$.

Die Funktion f heißt an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Dieser Grenzwert heißt **Ableitung** oder **Differentialquotient der Funktion f an der Stelle x_0** und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Den Differenzenquotienten kann man auch in der Form $d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (mit $h \neq 0$; $x_0, x_0 + h \in D_f$) schreiben.

Damit lässt sich der Differentialquotient auch wie folgt formulieren: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Anschaulich beschreibt die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 den Anstieg des Graphen von f im Punkt $P(x_0; f(x_0))$, also den Anstieg der Tangente an den Graphen von f in diesem Punkt. Will man das Änderungsverhalten einer Funktion nicht nur in einem Punkt, sondern in allen Punkten wissen, in denen f differenzierbar ist, muss man den Differentialquotienten von f an jeder Stelle x_0 berechnen:

Definition: Es sei $f: x \rightarrow f(x)$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich D_f .

Die Funktion $f': x \rightarrow f'(x)$, die jeder Stelle $x \in D_f$, an der f differenzierbar ist, die Ableitung $f'(x)$ an dieser Stelle zuordnet, heißt **Ableitungsfunktion** (oder kurz: Ableitung) der Funktion f .

Die Differentialrechnung spielt besonders in der Physik eine bedeutende Rolle. Ein klassisches Beispiel dafür findet man innerhalb der Kinematik: Ein Massepunkt bewege sich auf einer Zahlengeraden. Die Funktion $x: t \rightarrow x(t)$, die der Zeit t den Ort x des Massepunktes zuordnet, heißt Ort-Zeit-Gesetz der Bewegung. Die mittlere Geschwindigkeit des

Massepunktes zwischen den Zeitpunkten t_0 und t ($t \neq t_0$) ist leicht mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$

berechenbar. Will man die Geschwindigkeit des Massepunktes in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit beschreiben, reicht die mittlere Geschwindigkeit nicht aus, man muss die momentanen Geschwindigkeiten des Massepunktes in allen Zeitpunkten t_0 kennen. Verkleinert man das Zeitintervall hinreichend genug, wird die mittlere Geschwindigkeit im Rahmen der Messgenauigkeit die momentane Geschwindigkeit beschreiben. Die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ des

Massepunktes zum Zeitpunkt t_0 erhält man im Grenzübergang $t \rightarrow t_0$: $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0)$. Die

Geschwindigkeit des Massepunktes kann aus dem Ort-Zeit-Gesetz durch Differenzieren berechnet werden. Gleichermäßen erhält man die Beschleunigung, welche die Änderung der Geschwindigkeit eines Massepunktes

beschreibt, aus der zweiten Ableitung des Ortes nach der Zeit: $a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = x''(t_0)$.

3. Didaktische Rechtfertigung

Der Rahmenplan für die Gymnasiale Oberstufe des Landes Mecklenburg – Vorpommern verlangt innerhalb des Themenbereiches «Differentialrechnung» die Behandlung der lokalen und globalen Differenzierbarkeit. Es werden hier im Zusammenhang mit der lokalen Differenzierbarkeit die „geometrische Interpretation (Sekante, Tangente)“ und die „Interpretation in nichtgeometrischen Zusammenhängen (Geschwindigkeit, Änderungsrate, ...)“, bei der Betrachtung höherer Ableitungen die Diskussion der geometrischen Zusammenhänge zwischen den Graphen der einzelnen Ableitungsfunktionen empfohlen.¹

Die Differentialrechnung als mächtiges Instrument der Analysis, die ein gesamtes Halbjahr im Leistungskurs der Jahrgangsstufe 12 einnimmt, muss von Anfang an hinreichend gut motiviert werden. Deshalb erscheint es ratsam, neben der Ableitung einer Funktion an einer Stelle, grade auch die Ableitungsfunktion eng mit praxisnahen Erscheinungen zu verbinden. Bewegungen sind keine statischen Erscheinungen. Eine Bewegung fordert deshalb geradezu die Kenntnis der Veränderungen der Größen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung zu jedem beliebigen Zeitpunkt heraus. Durch diese Überlegungen kann die Ableitungsfunktion genügend motiviert werden. Den Schülern kann mit dem geplanten Vorgehen nahe gebracht werden, dass die Mathematik Hilfsmittel für andere Naturwissenschaften zur Verfügung stellt und sich nicht selbstlos und ohne Ziel mit Verfahren beschäftigt.

Der Differentialquotient wurde gestützt durch die innermathematische geometrische Interpretation aus dem Problem der Bestimmung der Momentangeschwindigkeit beim Freien Fall hergeleitet. Die Differentialrechnung wurde demnach bereits mit der Kinematik verknüpft. Die Einführung der Ableitungsfunktion am Beispiel einer Bewegung beinhaltet daher Festigungselemente des Differentialquotienten. Die Schüler erhalten durch die Wahl der gleichen physikalischen Thematik Gelegenheit, innerhalb der Einführung des Differentialquotienten eventuell aufgetretene Unklarheiten zu beseitigen.

Bei jeder Messung, also auch bei der Aufnahme eines Ort-Zeit-Gesetzes im Rahmen dieses Unterrichts, sind Messfehler zu verzeichnen, die auftretende Reibung wird in einfachen physikalischen Bewegungsgesetzen nicht berücksichtigt. Die Diskussion der Abweichungen der Messung von der Theorie ist Aufgabe des Physikunterrichts und soll an dieser Stelle nicht tiefer thematisiert werden. Die Messergebnisse sind mit dem geplanten Versuchsaufbau, nicht zuletzt bedingt durch die hohe Anzahl von Messwertpaaren, sehr genau, so dass störende grobe Abweichungen nicht zu verzeichnen sind.

Schwierigkeiten mit den Unterrichtsinhalten sind bei Schülern zu erwarten, die Physik in der Sekundarstufe II abgewählt haben. Vor allem ungewohnte Bezeichnungen von Variablen können Probleme heraufbeschwören. Deshalb wird der Ort $x(t)$ in Anlehnung an das den Schülern aus der Sekundarstufe I bekannte Formelzeichen der physikalischen Größe «Weg» mit $s(t)$ bezeichnet. Der Unterschied zwischen zurückgelegter Weg und Ort eines Teilchens muss dabei Beachtung finden, denn der zurückgelegte Weg ist im Gegensatz zum Ort eine monoton wachsende Funktion.

Innerhalb der Differentialrechnung werden auch höhere Ableitungen betrachtet. Die Diskussion der Beschleunigung kann vorgreifend auf die Möglichkeit höherer Ableitungen hinweisen.

Die im Unterricht zu führenden Berechnungen sind dazu geeignet, den sicheren Umgang mit Termen zu üben. Das Vorrechnen von Aufgaben an der Tafel soll unter diesem Gesichtspunkt möglichst ohne Hilfsmittel erfolgen.

Nach der Definition der Ableitungsfunktion soll das Vorgehen beim Bilden der Ableitungsfunktion formalisiert werden. Deshalb werden die physikalischen Bezeichnungen durch die in der Mathematik üblichen Variablen ersetzt. Die Schüler sollen einige Funktionen differenzieren und die Funktionen, wie auch die Ableitungsfunktionen zeichnen.

Mit der Einbeziehung der Kinematik in den Mathematikunterricht werden auch physikalische Zusammenhänge gefestigt. Am Anfang der Jahrgangsstufe 12 werden im Physikunterricht sowohl im Grund- als auch im Leistungskurs Bewegungsabläufe behandelt. Die Kenntnis und Bedeutung der Gesetze der hier betrachteten gleichmäßig beschleunigten Bewegung stellen notwendige Voraussetzungen für die Unterrichtsinhalte im Bereich der Mechanik dar.²

4. Angestrebtes Unterrichtsergebnis

- Die Schüler erkennen an einem Beispiel, dass die Mathematik als Beschreibungs- und Problemlösesprache in anderen Naturwissenschaften verwendet wird und bedeutende Hilfsmittel für diese zur Verfügung stellt.
- Die Schüler erfahren an einem Beispiel die Reichweite und Bedeutung der Differentialrechnung.
- Die Schüler erwerben zunehmend die Fähigkeit, Probleme der Realität zu modellieren.
- Die Schüler erkennen den Unterschied zwischen lokaler und globaler Differenzierbarkeit.
- Die Schüler erkennen die Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen ihrer Ableitungsfunktion und können in neuen Fällen Schlüsse aus den Beziehungen ziehen.
- Die Schüler können Ableitungsfunktionen mit Hilfe des Differentialquotienten bilden.

5. Überlegungen zur Methode

Die Doppelstunde beginnt mit einer Kontrolle der Hausaufgaben³. Zwei Rechnungen werden von Schülern an der Tafel vorgeführt. Die restlichen Ergebnisse werden mündlich verglichen. Die Ableitungen sollen möglichst frei vorgeführt werden, damit die Schüler lernen, sich sicher, weitestgehend ohne Hilfsmittel, vor der Klasse zu behaupten. Dieses Vorgehen ist den Schülern vertraut. Weil die Schüler ihr Leistungsniveau i.d.R. kritisch einschätzen und an der Beseitigung von eigenen Defiziten interessiert sind, werden sie Fragen zu einzelnen Problemen sicherlich nicht

¹ Vgl. Rahmenplan: Sekundarstufe II. 1999.

² Relevant ist das Verständnis der Bewegungsgesetze vor allem für die sieben Schüler, die einen Physikkurs besuchen.

³ Die Schüler sollten Differentialquotienten von Funktionen an gegebenen Stellen bilden.

zurückhalten.⁴ Es ist auf Grund des Schwierigkeitsgrades zu erwarten, dass nicht alle Aufgaben erfolgreich zu Hause bewältigt wurden. Bei gravierenden Problemen wird der Vergleich der Hausaufgabe einen größeren Zeitrahmen in Anspruch nehmen. Liegen die Schwierigkeiten eher in speziellen kniffligen Umformungsschritten, werden vom Lehrenden Tipps gegeben. Die Schüler können sich dann an der jeweiligen Aufgabe nochmals zu Hause versuchen. Im Folgenden soll die Aufnahme der Ort-Zeit-Kurve einer Bewegung im Vordergrund des Unterrichts stehen.

Wichtig ist bei der Einbeziehung außermathematischer Themen, dass die eigentlichen Ziele des Mathematikunterrichtes nicht in den Hintergrund gedrängt werden. Das hier gewählte Experiment soll wohl zur Motivation beitragen und das zu behandelnde Thema legitimieren, jedoch darf die eigentliche Durchführung nicht im Vordergrund stehen. Für eine fruchtbare Diskussion des Zusammenhangs zwischen Ableitungsfunktion und Ursprungsfunktion reicht eine relativ einfach zu beschreibende Bewegung, wie etwa die geradlinig gleichförmige oder auch der Freie Fall nicht aus. Deshalb wurde hier eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit v_0 und einer negativen Beschleunigung gewählt. Die Beschleunigung wird durch die Neigung einer schiefen Ebene, die Anfangsgeschwindigkeit durch einen vom Elektromagneten kommenden Impuls realisiert. Die gemessene Ort-Zeit-Kurve, eine nach unten geöffnete Parabel, hat genügend Potential, Zusammenhänge zwischen Änderung des Anstieges und dem Verlauf der zugehörigen Ableitungsfunktion aufzudecken.

Kompliziertere Bewegungen bedingen komplexere Messanordnungen und fordern eine große Anzahl an Messungen. Bei einer einfachen, z.B. mit Lichtschranken realisierten Messanordnung würde schon die Aufnahme des Ort-Zeit-Gesetzes den zeitlichen Rahmen sprengen. Deshalb wird die Abhängigkeit des Ortes von der Zeit berührungslos mit Hilfe einer Kamera erfasst. Die Auswertung und Darstellung der Messergebnisse übernimmt eine Software. Sofort nach der Durchführung des Experimentes stehen neben dem Ort-Zeit-Diagramm auch das Geschwindigkeit-Zeit- und das Beschleunigung-Zeit-Diagramm visuell zur Verfügung.

Eine Schwierigkeit besteht beim Experiment darin, dass sich die Schüler auf zwei Vorgänge gleichzeitig konzentrieren müssen: Der sich bewegende Körper auf der Luftkissenbahn und das an die Wand projizierte Ort-Zeit-Diagramm müssen gleichzeitig beobachtet werden. Deshalb wird das Experiment zweimal durchgeführt. Die räumlichen Gegebenheiten ermöglichen den wünschenswerten Aufbau der Luftkissenbahn unter der Projektionsfläche nicht. Denkbar wäre ein Aufbau auf dem Lehrertisch, dies würde jedoch die Sichtbarkeit der Tafel enorm einschränken.

Alternativ, vor allem unter Beachtung der gegebenen materiellen schulischen Bedingungen, hätte man eine Computersimulation einsetzen können. Das konkrete Durchführen des Experimentes hat jedoch eine viel engere Bindung zur Praxis, als es eine Computersimulation vermag. Bei einer Simulation besteht die Gefahr, dass die real ablaufenden Vorgänge nicht vollständig erfasst werden; in diesem Fall würden die folgenden mathematischen Betrachtungen als sinnlose Rechnungen verstanden werden.

Die physikalischen Hintergründe der Ort-Zeit-Kurve sollen weder im Vorfeld, noch direkt nach dem Versuch diskutiert werden, denn eine tiefere Hinterfragung der Vorgänge würde sofort auf physikalischem Wege zu den mathematisch zu entwickelnden Diagrammen führen; eine ausreichende Motivation der Rechnungen wäre nicht mehr gesichert. Zuerst soll die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve durch geometrische Konstruktion⁵, erst danach die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion mit Hilfe des Differentialquotienten ermittelt werden. Dieses Vorgehen stellt eine enge Beziehung zur Einführungsstunde⁶ des Differentialquotienten her, der Begriff der Ableitung einer Funktion an einer Stelle wird gefestigt und die inhaltliche Durchdringung der Definition der Ableitungsfunktion wird vorbereitet.

Die Gleichung der gegebenen Ort-Zeit-Funktion wird vom Computer mittels quadratische Regression berechnet. Denkbar wäre gewesen, dass die Schüler die Funktionsgleichung selbständig ermitteln; die hierfür notwendige Zeit soll der Differentialrechnung zugute kommen. Zur Vereinfachung der Rechnung wird das absolute Glied vernachlässigt und unter Beachtung der Messgenauigkeit wird mit zwei Stellen hinter dem Komma gerechnet.

Die Schüler erhalten ein Arbeitsblatt mit dem Ort-Zeit-Diagramm, das im Vorfeld aufgenommen wurde und mit der Kurve des Experiments annähernd übereinstimmt.⁷ Dadurch soll neben einer Erleichterung der Arbeit erreicht werden, dass jeder Schüler eine ordentliche saubere Skizze zum späteren Nachschlagen im Heft hat und dass die folgenden Rechnungen mit dem beobachteten Experiment dauerhaft eng verankert werden.

Der erste Schritt zur Berechnung des Differenzenquotienten wird gemeinsam an der Tafel entwickelt, damit gesichert ist, dass alle Schüler wissen, was wie berechnet werden soll. Um die weitere Rechenschritte später vergleichen zu können, arbeitet ein Schüler hinter der Tafel. Vereinzelt könnten Schwierigkeiten entstehen, weil die Gleichungen sehr viele Variablen enthalten und zwischen physikalischen Größen und Einheiten unterschieden werden muss. Die Schüler müssen jedoch lernen, zwischen Konstanten und Variablen zu unterscheiden. Zusatz für schnelle Schüler soll die Berechnung der Beschleunigung-Zeit-Funktion sein. Beide Rechnungen werden im Anschluss verglichen. Anhand der Diagramme soll nun der physikalische Hintergrund erörtert werden.

Im Folgenden werden die Kurven als mathematische Objekte betrachtet. Der Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion anhand des Beispiels wird im Unterrichtsgespräch erörtert, die Ergebnisse werden in Tabellenform festgehalten. Zur Unterstützung der Anschauung wird die Bewegung in drei Abschnitte unterteilt.

Anschließend werden die Erkenntnisse auf den Freien Fall angewendet. Den Schülern wird dadurch nochmals die Möglichkeit verdeutlicht, sich die Kurven, die innerhalb der Physik eine Bewegung beschreiben, auch ohne physikalische Interpretation aus einer gegebenen Ort-Zeit-Funktion zu erarbeiten.

⁴ Es ist möglich, dass die Anwesenheit «fremder» Personen die sonst offene Diskussionsatmosphäre beeinträchtigt.

⁵ «Konstruktion» meint hier das Skizzieren von Tangenten an den Graphen der Ort-Zeit-Kurve und Übertragen der Anstiege in das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

⁶ Der Differentialquotient wurde gestützt von der Sekanten-Tangenten-Problematik am Beispiel des Freien Falls hergeleitet.

⁷ Das direkt gemessene Ort-Zeit-Diagramm kann in angemessener Zeit nur einmal ausgedruckt werden.

Die allgemeine Herleitung der Gleichungen zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung aus dem Weg-Zeit-Gesetz soll die Allgemeingültigkeit der gewonnenen Erkenntnisse nachweisen und die Bedeutung der Differentialrechnung für die Physik nochmals hervorheben.

Im Lehrervortrag wird nun über das Bilden der Ableitungsfunktion mit den in der Mathematik üblichen Bezeichnungen reflektiert und die Ableitungsfunktion wird definiert. Außerdem wird der Algorithmus an dem Beispiel $f(x) = x^3$ demonstriert. Dadurch soll gesichert werden, dass jeder der Schüler die wesentlichen Schritte und auch die geforderte Reihenfolge und Ausführlichkeit der Rechnungen erfasst. Die Schüler sollten bereits in der Hausaufgabe diese Funktion an einer Stelle mit der Bildung des Differentialquotienten $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ differenzieren.⁸ Eventuell aufgetretene

Schwierigkeiten können durch die analoge, nun aber allgemeine Rechnung, beseitigt werden.

Im Anschluss erhalten die Schüler Gelegenheit, Funktionen zu differenzieren. Die Ergebnisse werden mündlich zusammengetragen, die jeweiligen Funktionen werden an die Wand projiziert. Je nach der noch verbleibenden Zeit wird diese Übungsphase einen mehr oder weniger großen Umfang einnehmen.

Die Hausaufgabe umfasst Übungen zur Bildung von Ableitungsfunktionen.

6. Verlaufsplanung

Zeit	Inhalt	Methoden	Medien und Hilfsmittel
7:45	Kontrolle der Hausaufgaben	SV, UG	Tafel
7:55	Experiment: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	LV, UG	DE, Projektor, AB
8:00	Konstruktion der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve	UG, EA	Tafel, Projektor
8:10	Berechnung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion Zusatz: Berechnung der Beschleunigung-Zeit-Funktion	UG, EA	Tafel
8:25	Vergleich der Ergebnisse; Physikalische Interpretation der Diagramme	SV, UG	Tafel, Projektor
8:35	Zusammenhang: Funktion \Leftrightarrow Ableitungsfunktion	UG	Tafel
8:40	Allgemeine Gleichungen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung	SV, UG	Tafel
8:50	Definition: Ableitungsfunktion; Bsp. zur Berechnung	LV	Tafel
9:00	Berechnen und Darstellen von Ableitungsfunktionen	EA	
9:10	Vergleich der Ergebnisse	UG	Projektor

Abbruchmöglichkeiten und Alternativen

- Die Schüler erhalten die Aufgabe, aus einem gegebenen Beschleunigung-Zeit-Diagramm auf mögliche Geschwindigkeit-Zeit- und Ort-Zeit-Diagramme zu schließen.
- Es werden mehrere und/oder kompliziertere Funktionen differenziert.
- Es werden weniger/keine Funktionen am Ende des Unterrichts differenziert.
- Die Betrachtung des freien Falls entfällt.
- Die allgemeine Rechnung zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung entfällt.

7. Literatur und Medien

- Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern (Hrsg.): **Rahmenplan** für das Gymnasium: **Sekundarstufe II. Mathematik. 1999.**
- **Heuser**, Harro: Lehrbuch der Analysis Teil 1. 12. Auflage. Leipzig: Teubner, **1998.**
- **Weber**, Karlheinz; **Zillmer**, Wolfgang: Mathematik Leistungskurs: Analysis Analytische Geometrie Stochastik Sekundarstufe II. Berlin: Paetec, **1996.**
- **Weber**, Karlheinz; **Zillmer**, Wolfgang: Mathematik Aufgabenbuch Leistungskurs: Analysis Analytische Geometrie Stochastik Sekundarstufe II. Berlin: Paetec, **1997.**

8. Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen

- AB..... Arbeitsblatt
- DE..... Demonstrationsexperiment
- EA..... Schülereinzelarbeit⁹
- LV..... Lehrervortrag
- SV..... Schülervortrag
- UG Unterrichtsgespräch

⁸ Die Schüler können $f(x) = x^3$ bereits durch Bildung von $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ an einer Stelle differenzieren.

⁹ Innerhalb des Unterrichts sind bei der Einzelarbeit Hilfen von Mitschülern meist gestattet. Strenge selbständige Schülerarbeit wird insbesondere dann gefordert, wenn die erbrachten Leistungen benotet werden sollen.

9. Auszüge des möglichen Tafelbildes

	<p style="text-align: center;">Zusammenhang zwischen</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;"></td> <td style="width: 33%; text-align: center;">$s(t)$ und $v(t)=s'(t)$</td> <td style="width: 33%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">I</td> <td> $m_t > 0$ m_t nimmt ab m_t nimmt gleichm. ab </td> <td> $v(t) > 0$ $v(t)$ m↓ lin. Fkt. </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">II</td> <td>$m_t = 0$</td> <td>$v(t) = 0$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">III</td> <td>$m_t < 0$</td> <td>$v(t) < 0$</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">siehe oben</p> $v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \dots = at + v_0$ $a(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} = \dots = a$ <p>Definition: Ableitungsfunktion ...</p>		$s(t)$ und $v(t)=s'(t)$		I	$m_t > 0$ m_t nimmt ab m_t nimmt gleichm. ab	$v(t) > 0$ $v(t)$ m↓ lin. Fkt.	II	$m_t = 0$	$v(t) = 0$	III	$m_t < 0$	$v(t) < 0$	$s(t) = -0,01 \frac{m}{s^2} t^2 + 0,14 \frac{m}{s} t$ $v(t) = s'(t) = -0,02 \frac{m}{s^2} t + 0,14 \frac{m}{s}$ $a(t) = v'(t) = -0,02 \frac{m}{s^2} = konst$ <p>Gleichmäßig beschleunigte Bewegung (allgemein): geg.: a, v_0, s_0</p> $s(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0$ $v(t) = at + v_0$ $a(t) = a = konst$
	$s(t)$ und $v(t)=s'(t)$													
I	$m_t > 0$ m_t nimmt ab m_t nimmt gleichm. ab	$v(t) > 0$ $v(t)$ m↓ lin. Fkt.												
II	$m_t = 0$	$v(t) = 0$												
III	$m_t < 0$	$v(t) < 0$												
	<table style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p style="text-align: center;">Geschwindigkeit</p> $d(h) = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$ $= \dots$ $= -0,02 \frac{m}{s^2} t_0 - 0,01 \frac{m}{s^2} h + 0,14 \frac{m}{s}$ $s'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} d(h)$ $= \dots$ $= -0,02 \frac{m}{s^2} t_0 + 0,14 \frac{m}{s}$ </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p style="text-align: center;">Beschleunigung</p> $\bar{a} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \quad a = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ $a(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} = \dots = -0,02 \frac{m}{s^2}$ </td> </tr> </table>	<p style="text-align: center;">Geschwindigkeit</p> $d(h) = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$ $= \dots$ $= -0,02 \frac{m}{s^2} t_0 - 0,01 \frac{m}{s^2} h + 0,14 \frac{m}{s}$ $s'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} d(h)$ $= \dots$ $= -0,02 \frac{m}{s^2} t_0 + 0,14 \frac{m}{s}$	<p style="text-align: center;">Beschleunigung</p> $\bar{a} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \quad a = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ $a(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} = \dots = -0,02 \frac{m}{s^2}$											
<p style="text-align: center;">Geschwindigkeit</p> $d(h) = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$ $= \dots$ $= -0,02 \frac{m}{s^2} t_0 - 0,01 \frac{m}{s^2} h + 0,14 \frac{m}{s}$ $s'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} d(h)$ $= \dots$ $= -0,02 \frac{m}{s^2} t_0 + 0,14 \frac{m}{s}$	<p style="text-align: center;">Beschleunigung</p> $\bar{a} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \quad a = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ $a(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} = \dots = -0,02 \frac{m}{s^2}$													

10. Anhang

Ort-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm einer Bewegung

