

P1 Analysis, Geometrie, Stochastik

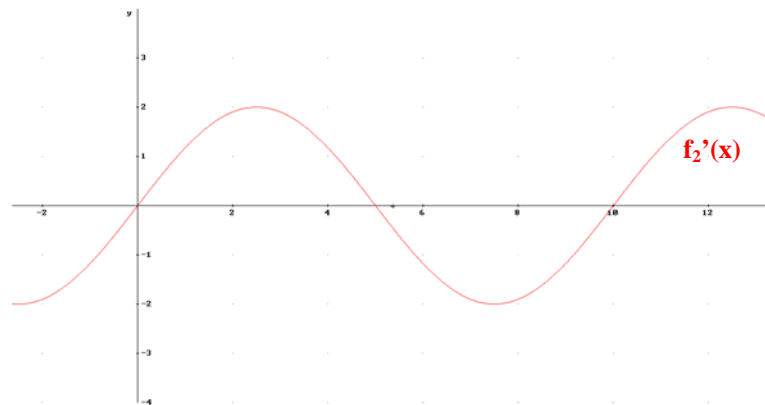
1.1

Ableitungsfunktion von f_1 :

Intervall	Ableitung
$-5 < x < -3$	$f_1'(x) = 2$
$-3 < x < 0$	$f_1'(x) = -\frac{2}{3}$

Intervall	Ableitung
$0 < x < 3$	$f_1'(x) = \frac{2}{3}$
$3 < x < 5$	$f_1'(x) = -2$

Skizze: Ableitungsfunktion von f_2



1.2

$$f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

1.2.1

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{x^2} = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 8 &\Rightarrow x_{01} = 2\sqrt{2} & x_{02} = -2\sqrt{2} \\ &\Rightarrow S_{x01}(2\sqrt{2}; 0) & S_{x02}(-2\sqrt{2}; 0) \\ f(0) = 2 &\Rightarrow S_y(0; 2) \end{aligned}$$

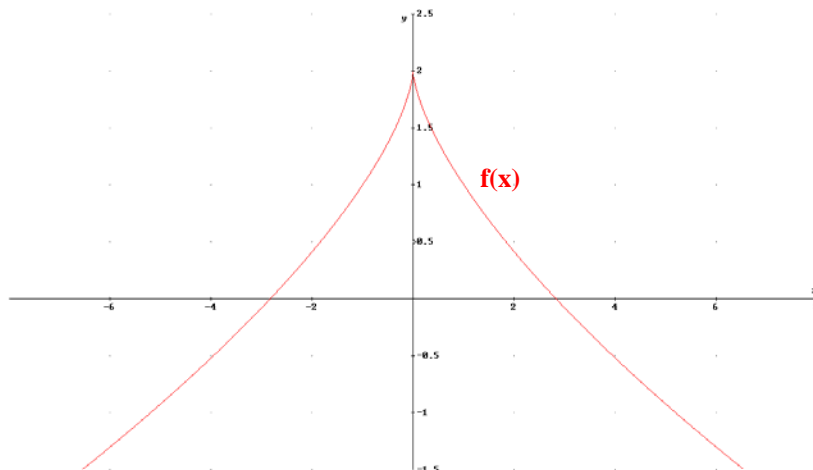
1.2.2

1. Ableitung:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$$

ist für $x = 0$ nicht definiert. $\Rightarrow f$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Zeichnung:



1.2.3Umkehrfunktion f^{-1} :

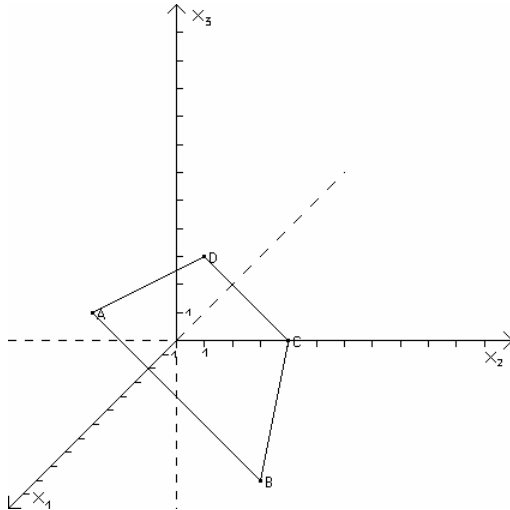
$$y = 2 - \sqrt[3]{x^2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 - \sqrt[3]{y^2} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt{(2-x)^3} = (2-x)\sqrt{(2-x)}$$

1.3

A(2; -2; 2), B(6; 6; -2), C(0; 4; 0), D(-2; 0; 2)

1.3.1

Zeichnung:



Das Viereck ABCD ist ein Trapez, wenn alle Punkte in einer Ebene liegen und zwei Seiten parallel zueinander sind.

Ebene E(ABC):

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(ABC): x + 2y + 5z = d$$

$$A \in E(ABC): \quad d = 2 + 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad E(ABC): x + 2y + 5z = 8$$

D \in E(ABC)?

$$-2 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene.}$$

 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$?

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

Das Viereck ABCD ist ein Trapez.

1.3.2Innenwinkel $\sphericalangle DAB$:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{96}} = \frac{0}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{96}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sphericalangle DAB = 90^\circ$$

Der Innenwinkel $\sphericalangle DAB$ ist 90° groß.

Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2} |\overline{AD} \times \overline{AB}| + \frac{1}{2} |\overline{CB} \times \overline{CD}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -8 \\ -16 \\ -40 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 \\ -8 \\ -20 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{1920} + \frac{1}{2} \sqrt{480} = 4\sqrt{30} + 2\sqrt{30} = 6\sqrt{30}
 \end{aligned}$$

Alternative: \overline{AD} ist Höhe des Trapezes

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{|\overline{AB}| + |\overline{DC}|}{2} \cdot |\overline{AD}| = \frac{\begin{vmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{vmatrix}}{2} \cdot \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\sqrt{96} + \sqrt{24}}{2} \cdot \sqrt{20} = \frac{4\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{30}
 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt $6\sqrt{30}$ FE.**1.3.3**

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad t \in \mathfrak{R} \quad E(ABC): x + 2y + 5z = 8$$

Schnittpunkt S von g mit E(ABC):

$$\begin{aligned}
 (3+t) + 2 \cdot (-5-3t) + 5 \cdot (9+4t) &= 8 & \Rightarrow & \quad 15t = -30 & \Rightarrow & \quad t = -2 \\
 \Rightarrow S(1; 1; 1)
 \end{aligned}$$

1.4.1X...Anzahl der defekten Leuchtdioden X ist $B_{200; 0,01}$ -verteilt (binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0,01$)

Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(X = 2) = \binom{200}{2} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{198} \approx 0,272 = 27,2\% \\
 P(B) &= P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,99^{200} \approx 0,866 = 86,6\% \\
 P(C) &= P(X < 4) \\
 &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
 &= 0,99^{200} + 200 \cdot 0,01 \cdot 0,99^{199} + \binom{200}{2} \cdot 0,01^2 \cdot 0,99^{198} + \binom{200}{3} \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^{197} \\
 &\approx 0,134 + 0,271 + 0,272 + 0,181 \\
 &\approx 0,858 \\
 &= 85,8\%
 \end{aligned}$$

1.4.2

$$\begin{aligned}
 P_\lambda(X = k) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad \lambda = n \cdot p \quad n \in \mathbb{N} \text{ groß} \quad p > 0 \text{ klein} \\
 \Rightarrow \lambda &= n \cdot p = 200 \cdot 0,01 = 2
 \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) \approx P_2(X = 2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0,271 = 27,1\%$$

$$P(B) = P(X \geq 1) \approx 1 - P_0(X=0) = 1 - \frac{2^0}{0!} e^{-2} \approx 0,865 = 86,5\%$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(X < 4) \\ &\approx P_0(X=0) + P_1(X=1) + P_2(X=2) + P_3(X=3) \\ &= \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} + \frac{2^3}{3!} e^{-2} \\ &\approx 0,135 + 0,271 + 0,271 + 0,180 \\ &\approx 0,857 \\ &= 85,7\% \end{aligned}$$

Begründung, dass die Verwendung der Formel sinnvoll ist:

- Ergebnisse sind (laut Beispielrechnungen, Nachweis erforderlich) hinreichend genau
- Berechnung des Binomialkoeffizienten ist aufwendig – entfällt bei der Poisson-Formel ($e^{-\lambda}$ muss nur einmal berechnet werden; sonst nur Berechnung der Fakultät von k notwendig)
⇒ Rechenaufwand bei Poisson ist geringer

W2 Analysis

$$f_a(x) = \frac{10x}{x^2 + a} \quad x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0$$

2.1

f_a ist eine ungerade Funktion:

$$f_a(-x) = \frac{-10x}{(-x)^2 + a} = \frac{-10x}{x^2 + a} = -f_a(x) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist symmetrisch zu } O(0; 0)$$

2.2

Ableitungen:

$$f_a'(x) = \frac{10(x^2 + a) - 10x \cdot 2x}{(x^2 + a)^2} = \frac{-10x^2 + 10a}{(x^2 + a)^2} = \frac{-10(x^2 - a)}{(x^2 + a)^2}$$

$$f_a''(x) = \frac{-20x(x^2 + a)^2 + 40x(x^2 - a)(x^2 + a)}{(x^2 + a)^4} = \frac{-20x(x^2 + a) + 40x(x^2 - a)}{(x^2 + a)^3} = \frac{20x^3 - 60ax}{(x^2 + a)^3} = \frac{20x(x^2 - 3a)}{(x^2 + a)^3}$$

$$f_a'''(x_w) = \frac{60x_w^2 - 60a}{(x_w^2 + a)^3} \quad (x_w \dots \text{Stelle, für die gilt: } f_a''(x_w) = 0)$$

Extrempunkte:

$$f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-10(x^2 - a)}{(x^2 + a)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -10(x^2 - a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a$$

(Nenner von $f_a'(x)$ ist immer ungleich Null)

$$\Rightarrow \quad x_{E1} = \sqrt{a} \quad f_a''(\sqrt{a}) = \frac{20\sqrt{a}(a-3a)}{(a+a)^3} = \frac{-5\sqrt{a}}{a^2} < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum} \quad f_a(\sqrt{a}) = \frac{5\sqrt{a}}{a}$$

$$\Rightarrow \quad x_{E2} = -\sqrt{a} \quad f_a''(-\sqrt{a}) = \frac{-20\sqrt{a}(a-3a)}{(a+a)^3} = \frac{5\sqrt{a}}{a^2} > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum} \quad f_a(-\sqrt{a}) = \frac{-5\sqrt{a}}{a}$$

$$\Rightarrow \quad P_{Max} \left(\sqrt{a}; \frac{5\sqrt{a}}{a} \right) \quad P_{Min} \left(-\sqrt{a}; \frac{-5\sqrt{a}}{a} \right)$$

Wendepunkte:

$$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{20x(x^2 - 3a)}{(x^2 + a)^3} = 0 \Leftrightarrow 20x(x^2 - 3a) = 0$$

(Nenner von $f_a''(x)$ ist immer ungleich Null)

$$\Rightarrow x_{w1} = 0 \quad f_a'''(0) = \frac{-60a}{a^3} = \frac{-60}{a^2} < 0 \quad \Rightarrow \text{konvex} \rightarrow \text{konkav} \quad f_a(0) = 0$$

$$\Rightarrow x_{w2} = \sqrt{3a} \quad f_a'''(\sqrt{3a}) = \frac{60 \cdot 3a - 60a}{(3a + a)^3} = \frac{15}{8a^2} > 0 \quad \Rightarrow \text{konkav} \rightarrow \text{konvex} \quad f_a(\sqrt{3a}) = \frac{5\sqrt{3a}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_{w2} = -\sqrt{3a} \quad f_a'''(-\sqrt{3a}) = \frac{60 \cdot 3a - 60a}{(3a + a)^3} = \frac{15}{8a^2} > 0 \quad \Rightarrow \text{konkav} \rightarrow \text{konvex} \quad f_a(-\sqrt{3a}) = \frac{-5\sqrt{3a}}{2a}$$

$$\Rightarrow P_{w1}(0;0) \quad P_{w2}\left(\sqrt{3a}; \frac{5\sqrt{3a}}{2a}\right) \quad P_{w3}\left(-\sqrt{3a}; \frac{-5\sqrt{3a}}{2a}\right)$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x}{x^2 + a} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10}{2x} = 0$$

(Regel von DE L' Hospital; Zähler und Nenner von $f_a(x)$ streben gegen ∞ bzw. $-\infty$)

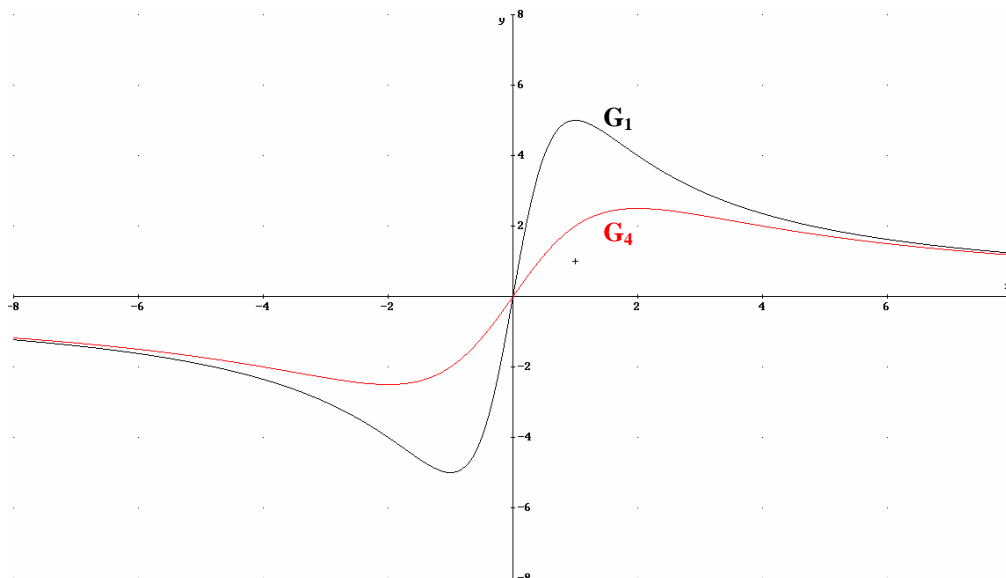
Asymptoten:

$$y = 0 \quad (\text{siehe Grenzwert})$$

(Es gibt keine Polasymptoten, da der Nenner von $f_a(x)$ wegen $a > 0$ nie Null wird.)

2.3

Skizze:



2.4

Funktion, auf der die Extrempunkte liegen:

$$P_{Max}\left(\sqrt{a}; \frac{5\sqrt{a}}{a}\right) \Rightarrow x = \sqrt{a} \quad y = \frac{5\sqrt{a}}{a} = \frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}$$

$$P_{Min}\left(-\sqrt{a}; \frac{-5\sqrt{a}}{a}\right) \Rightarrow x = -\sqrt{a} \quad y = \frac{-5\sqrt{a}}{a} = \frac{5x}{x^2} = \frac{5}{x}$$

Die Extrempunkte von $f_a(x)$ liegen auf der Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{5}{x}$.

2.5

$$f_1(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$$

Stammfunktion von f_1 :

$$F_1(x) = 5 \cdot \ln(x^2 + 1) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Nachweis: $F_1'(x) = 5 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{10x}{x^2 + 1} = f_1(x)$

Fläche unter G_1 von $x = 0$ bis $x = 1$:

$$\left| \int_0^1 f_1(x) dx \right| = \left| \left[5 \cdot \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 \right| = 5 \ln 2$$

Die Fläche hat einen Inhalt von $5 \ln 2$ FE.

2.6

$$h(x) = \frac{5}{2}x(x^2 - 4x + 5) \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{ist Näherungsfunktion für } f_1 \text{ in } [0; 1]$$

Funktionswerte an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 0 & h(0) &= 0 \\ f_1(1) &= 5 & h(1) &= \frac{5}{2}(1 - 4 + 5) = 5 \end{aligned}$$

Flächeninhalte von $f_1(x)$ und $h(x)$ in $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_1(x) dx \right| &= 5 \ln 2 \approx 3,466 \\ \left| \int_0^1 h(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 \left(\frac{5}{2}x^3 - 10x^2 + \frac{25}{2}x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{5}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{25}{4}x^2 \right]_0^1 \right| = \left| \frac{5}{8} - \frac{10}{3} + \frac{25}{4} \right| = \frac{85}{24} \approx 3,5417 \end{aligned}$$

Die Funktionswerte an den Randpunkten des Intervalls stimmen überein. Die Abweichung beim Flächeninhalt ist gering. Daher ist $h(x)$ eine geeignete Näherung für $f_1(x)$.

W3 Analysis

$$f(x) = x^2 \cdot e^{2-x} \quad x \in \mathbb{R}$$

3.1

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & \Leftrightarrow & \quad x^2 \cdot e^{2-x} = 0 & \Rightarrow & \quad x = 0 \\ f(0) &= 0 & \Rightarrow & \quad S_x(0;0) = S_y(0;0) \end{aligned}$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot e^{2-x} - x^2 \cdot e^{2-x} = x(2-x)e^{2-x} \\ f''(x) &= (2-2x) \cdot e^{2-x} - (2x-x^2) \cdot e^{2-x} = (2-2x-2x+x^2)e^{2-x} = (x^2-4x+2)e^{2-x} \\ f'''(x) &= (2x-4)e^{2-x} - (x^2-4x+2)e^{2-x} = (2x-4-x^2+4x-2)e^{2-x} = (-x^2+6x-6)e^{2-x} \end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 & \Leftrightarrow & \quad x(2-x)e^{2-x} = 0 \\ \Rightarrow & \quad x_{E1} = 0 & \quad f''(0) = 2e^2 > 0 & \Rightarrow \text{Minimum} & \Rightarrow & \quad P_{Min}(0;0) \\ \Rightarrow & \quad x_{E2} = 2 & \quad f''(2) = (4-8+2)e^0 = -2 < 0 & \Rightarrow \text{Maximum} & \quad f(2) = 4 & \Rightarrow & \quad P_{Max}(2;4) \end{aligned}$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2)e^{2-x} = 0 \Rightarrow x_{W1, W2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x_{W1} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} f'''(2 + \sqrt{2}) &= \left(-(2 + \sqrt{2})^2 + 6(2 + \sqrt{2}) - 6 \right) e^{-\sqrt{2}} \\ &= (-4 - 4\sqrt{2} - 2 + 12 + 6\sqrt{2} - 6) e^{-\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} > 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Wendepunkt konkav \rightarrow konvex

$$f(2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-\sqrt{2}} = \frac{(6 + 4\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow P_{W1} \left((2 + \sqrt{2}); \frac{(6 + 4\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}} \right)$$

$$x_{W2} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} f'''(2 - \sqrt{2}) &= \left(-(2 - \sqrt{2})^2 + 6(2 - \sqrt{2}) - 6 \right) e^{\sqrt{2}} \\ &= (-4 + 4\sqrt{2} - 2 + 12 - 6\sqrt{2} - 6) e^{\sqrt{2}} \\ &= -2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} < 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Wendepunkt konvex \rightarrow konkav

$$f(2 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{\sqrt{2}} = (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$$

$$P_{W2} \left((2 - \sqrt{2}); (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \right)$$

3.2

Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot e^{2-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x \cdot (-e^{2-x})) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \cdot e^{2-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2e^2}{e^x} \right) = 0$$

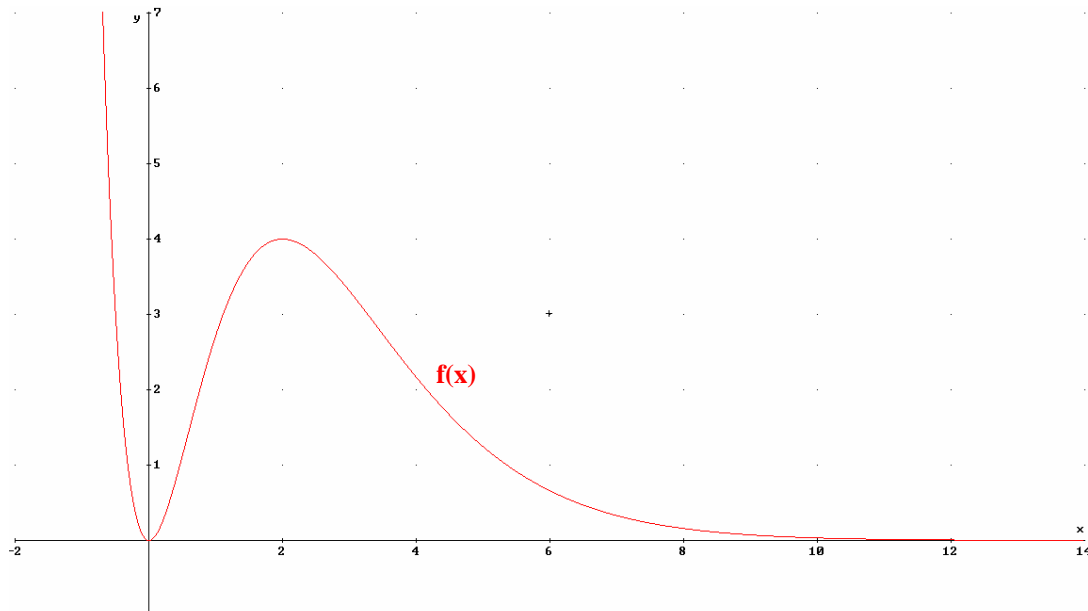
Regel von DE L' Hospital;

(Faktoren von $f(x)$ streben gegen ∞ bzw. Null)

(Nach einmaliger Anwendung der Regel streben die Faktoren gegen ∞ bzw. Null.)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 \cdot e^{2-x}) = \infty$$

Skizze:



3.3

O(0; 0), P(a; 0), Q(a; f(a))

Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal

Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks:

$$F(a) = \frac{1}{2} a \cdot f(a) = \frac{1}{2} a \cdot (a^2 e^{2-a}) = \frac{1}{2} a^3 e^{2-a}$$

Ableitungen:

$$F'(a) = \frac{3}{2}a^2 e^{2-a} - \frac{1}{2}a^3 e^{2-a} = \frac{1}{2}a^2 e^{2-a} (3-a)$$

$$F''(a) = \left(3a - \frac{3}{2}a^2\right) e^{2-a} - \left(\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^3\right) e^{2-a} = a \left(3 - 3a + \frac{1}{2}a^2\right) e^{2-a}$$

Extrempunkt von F(a):

$$F'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}a^2 e^{2-a} (3-a) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad F(0) = 0 \quad \Rightarrow \text{kein maximaler Flächeninhalt}$$

$$\Rightarrow a = 3 \quad F''(3) = 3 \left(3 - 9 + \frac{9}{2}\right) e^{-1} = \frac{-9}{2e} < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum} \quad F(3) = \frac{27}{2e}$$

Für $x = a = 3$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal. Der Flächeninhalt beträgt dann $\frac{27}{2e}$ FE.

3.4

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad x \in \mathbb{R}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{Näherung für } f \text{ in } [0; 2]$$

$$r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Berechnung der Koeffizienten von r(x):

$$r(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0 \quad \Rightarrow \quad r(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$r'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad r(x) = ax^3 + bx^2$$

$$r(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b = 4 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - 2a$$

$$r'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + (1 - 2a) = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow r(x) = -x^3 + 3x^2$$

Flächeninhalt von r(x) in [0; 2]:

$$F_r = \left| \int_0^2 r(x) dx \right| = \left| \int_0^2 (-x^3 + 3x^2) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^2 \right| = |-4 + 8| = 4$$

Stammfunktion von f(x):

$$\text{Partielle Integration:} \quad \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{2-x} dx \quad u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x \quad v(x) = -e^{2-x} \quad v'(x) = e^{2-x}$$

$$\int x^2 \cdot e^{2-x} dx = -x^2 e^{2-x} + 2 \int x e^{2-x} dx$$

$$\int x e^{2-x} dx \quad u(x) = x \quad u'(x) = 1 \quad v(x) = -e^{2-x} \quad v'(x) = e^{2-x}$$

$$\int x e^{2-x} dx = -x e^{2-x} + \int e^{2-x} dx = -x e^{2-x} - e^{2-x}$$

$$\int x^2 \cdot e^{2-x} dx = -x^2 e^{2-x} + 2(-x e^{2-x} - e^{2-x}) = -(x^2 + 2x + 2) e^{2-x} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Flächeninhalt von f(x) in [0; 2]:

$$F_f = \left| \int_0^2 f(x) dx \right| = \left| \int_0^2 x^2 \cdot e^{2-x} dx \right| = \left| \left[-(x^2 + 2x + 2) e^{2-x} \right]_0^2 \right| = |-10 + 2e^2| = 2e^2 - 10$$

Relativer Abweichung:

$$\frac{F_r}{F_f} = \frac{4}{2e^2 - 10} = \frac{2}{e^2 - 5} \approx 0,837 \quad \text{Die relative Abweichung beträgt rund 16,3\%.}$$

Absolute Abweichung:

$$F_f - F_r = 2e^2 - 10 - 4 = 2e^2 - 14 \approx 0,778 \quad \text{Die absolute Abweichung beträgt rund 0,78 FE.}$$

W4 Geometrie

$A(4; -1; 0), B(2; 3; -4), C(-6; 3; 0), D(-4; -1; 4), S(4; 9; 10) \quad \rho = 2,7 \frac{g}{cm^3} \quad O(0; 0; 0)$

4.1

Nachweis: ABCD ist Rechteck

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overline{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ und } \overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \perp \overline{AD}$$

\Rightarrow ABCD ist ein Rechteck

Mittelpunkt des Rechtecks:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \frac{1}{2} \overline{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(-1; 1; 0)$$

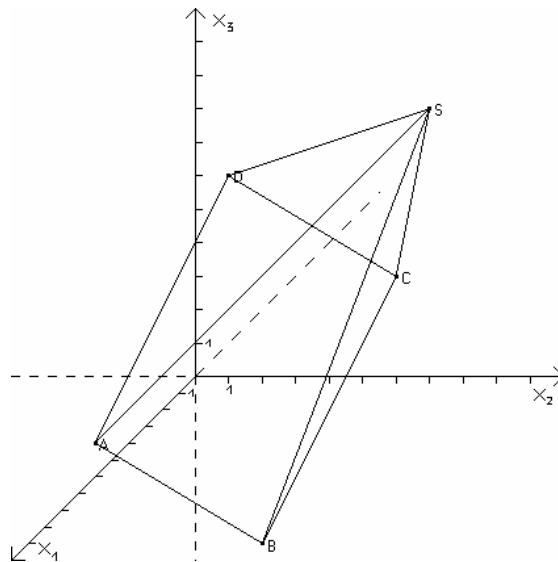
Bei einer geraden Pyramide muss \overline{MS} senkrecht auf der Grundfläche stehen:

$$\overline{MS} \cdot \overline{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -18 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Es handelt sich um eine schiefe Pyramide.}$$

4.2

Zeichnung:

Unsichtbare Kanten: \overline{CD}



Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} (\overline{AB} \times \overline{AD}) \cdot \overline{AS} = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 \\ 40 \\ 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 240$$

Masse der Pyramide:

$$m = \rho \cdot V = 2,7 \frac{g}{cm^3} \cdot 240 cm^3 = 648 g$$

Die Masse der Pyramide beträgt 648 g.

4.3

$P(x_p; y_p; z_p)$

Gerade $g(AD)$:

$$g(AD): \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

$P \in g(AD)$ mit $r \in [0; 1]$ und Abstände $|\overline{PB}|$ und $|\overline{PD}|$ gleich groß:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{PB}| = |\overline{PD}| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-x_p \\ 3-y_p \\ -4-z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-x_p \\ -1-y_p \\ 4-z_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-4+8r \\ 3+1 \\ -4-4r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-4+8r \\ -1+1 \\ 4-4r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2+8r \\ 4 \\ -4-4r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+8r \\ 0 \\ 4-4r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-2+8r)^2 + 4^2 + (-4-4r)^2} = \sqrt{(-8+8r)^2 + (4-4r)^2}$$

$$\Leftrightarrow (-2+8r)^2 + 4^2 + (-4-4r)^2 = (-8+8r)^2 + (4-4r)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 - 32r + 64r^2 + 16 + 16 + 32r + 16r^2 = 64 - 128r + 64r^2 + 16 - 32r + 16r^2$$

$$\Leftrightarrow 160r = 44$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{11}{40} \quad r \in [0; 1] \quad \Rightarrow \quad P \text{ liegt auf der Kante } \overline{AD}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{11}{40} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -1 \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow P\left(\frac{9}{5}; -1; \frac{11}{10}\right)$$

4.4

Gerade $h(L, \vec{a})$ und Gerade $k(AC)$:

$$h(L, \vec{a}): \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \quad k(AC): \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$h(L, \vec{a})$ und $k(AC)$ gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 1 + s = 4 - 10t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Schnittpunkt } L\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$$

$$\Rightarrow -3 + 6s = -1 + 4t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -5 + 10s = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}$$

Der Laserstrahl verläuft durch die Diagonale \overline{AC} der Grundfläche.

4.5

Der Laserstrahl erzeugt eine Schnittebene ε , die senkrecht zur Grundfläche ABCD verläuft. \Rightarrow Der Normalenvektor der Ebene E(ABCD) ist ein Spannvektor der Ebene ε .

Normalenvektor der Ebene E(ABCD):

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 40 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Laserstrahl verläuft durch A und den Mittelpunkt M' der Kante \overline{BC} . $\Rightarrow \overrightarrow{AM'}$ ist ein Spannvektor der Ebene ε .

Mittelpunkt M' der Kante \overline{BC} :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M'(-2; 3; -2)$$

Vektor $\overrightarrow{AM'}$:

$$\overrightarrow{AM'} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist Spannvektor der Ebene } \varepsilon.$$

Ebenengleichung ε :

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -10 \\ 19 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: -13x - 10y + 19z = d$$

$$A \in \varepsilon \quad \Rightarrow \quad d = -13 \cdot 4 - 10 \cdot (-1) + 19 \cdot 0 = -42 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon: -13x - 10y + 19z = -42$$

bzw. $\Rightarrow \quad \varepsilon: 13x + 10y - 19z = 42$

Gerade m(SB):

$$m(SB): \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -14 \end{pmatrix} \quad u \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt S' von m(SB) und ε :

$$\begin{aligned} 13(4 - 2u) + 10(9 - 6u) - 19(10 - 14u) &= 42 \\ \Rightarrow 52 - 26u + 90 - 60u - 190 + 266u &= 42 \\ \Rightarrow 180u &= 90 \\ \Rightarrow u &= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S'(3; 6; 3) \end{aligned}$$

($u \in [0; 1] \Rightarrow$ Laserstrahl durchschneidet die Kante \overline{SB} .)

Dreieck AM'S' gleichseitig?

$$|\overrightarrow{AM'}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \quad \left| \overrightarrow{M'S'} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{59} \quad \Rightarrow \quad \text{Das Dreieck AM'S' ist nicht gleichseitig.}$$

$$|\overrightarrow{AS'}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{59} \quad \Rightarrow \quad \text{Das Dreieck AM'S' ist gleichschenkelig.}$$

W5 Stochastik**5.1**

X...Anzahl der genesenen Testpatienten

H_0 : Genesung ist auf Selbstheilung zurückzuführen: $p = 0,35$

H_1 : Genesung war Therapieerfolg: $p = 0,6$

H_0 wahr \Rightarrow X ist $B_{30;0,35}$ -verteilt (binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0,35$)

H_1 wahr \Rightarrow X ist $B_{30;0,6}$ -verteilt (binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0,6$)

Fehlentscheidungen:

- Fehler 1. Art: H_0 abgelehnt, obwohl H_0 wahr
Es wird entschieden, dass die Genesungen Therapieerfolge sind, obwohl sie auf Selbstheilung zurückzuführen sind.
- Fehler 2. Art: Keine Entscheidung für H_1 , obwohl H_1 wahr
Es wird entschieden, dass die Genesungen keine Therapieerfolge sind, obwohl die Therapie für die Genesungen verantwortlich war.

Richtige Entscheidungen:

- Richtige Entscheidung 1: H_0 abgelehnt, und H_1 ist wahr.
Es wird entschieden, dass die Genesungen Therapieerfolge sind, und sie sind es auch.
- Richtige Entscheidung 2: Entscheidung für H_0 , und H_0 ist wahr.
Es wird entschieden, dass die Genesungen keine Therapieerfolge sind, und die Genesungen sind wirklich auf Selbstheilung zurückzuführen.

Annahmehereich von H_0 : $A = \{0; 1; \dots; 14\}$

Ablehnungsbereich von H_0 : $\bar{A} = \{15; 16; \dots; 30\}$

$P(\text{Fehler 1. Art}) = \alpha = B_{30;0,35}(\{15; 16; \dots; 30\}) = 1 - B_{30;0,35}(\{0; 1; \dots; 14\}) = 1 - F_{30;0,35}(14) = 1 - 0,9348 = 0,0652 = 6,52\%$

$P(\text{Fehler 2. Art}) = \beta = B_{30;0,6}(\{0; 1; \dots; 14\}) = B_{30;0,6}(\{0; 1; \dots; 14\}) = F_{30;0,6}(14) = 0,0971 = 9,71\%$

$P(\text{Richtige Entscheidung 1}) = B_{30;0,6}(\{15; 16; \dots; 30\}) = 1 - B_{30;0,6}(\{0; 1; \dots; 14\}) = 1 - F_{30;0,6}(14) = 1 - 0,0971 = 90,29\%$

$P(\text{Richtige Entscheidung 2}) = B_{30;0,35}(\{0; 1; \dots; 14\}) = F_{30;0,35}(14) = 0,9348 = 93,48\%$

5.2

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\% = 0,05$

5.2.1

Das Forscherteam ist mit beiden Irrtumswahrscheinlichkeiten unzufrieden:

Die Aufgabenstellung 5.2.1 bezieht sich auf die Aufgabe 5.1.

In Aufgabe 5.1 wurde berechnet: $P(\text{Fehler 1. Art}) = 6,52\%$ und $P(\text{Fehler 2. Art}) = 9,71\%$.

Ein Medikament wird also mit der Wahrscheinlichkeit von 6,25% eingesetzt, obwohl es keinen Heilungserfolg zeigt.

Rund 6,5% sind mit Hinblick auf mögliche Nebenwirkungen des Medikaments und eventueller Ablehnung einer alternativen wirkenden Therapie zu hoch.

Ein Medikament wird mit der Wahrscheinlichkeit von 9,71% nicht auf den Markt kommen, obwohl es einen Heilungserfolg zeigt. Rund 10% Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler sind mit Blick auf teure Forschung und vergebene Heilungschancen zu hoch.

5%-ige Signifikanz reicht in der Medizin nicht aus:

Ein Signifikanzniveau von 5% bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art 5% beträgt. Bei einer üblichen Nullhypothese der Art „Das Medikament wirkt nicht.“ (Man will signifikant nachweisen, dass das Medikament wirkt.) heißt das demnach, dass man einem Medikament mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% irrtümlich eine Wirkung zuschreibt.

5% der behandelten Fälle bedeutet bei einer großen Grundgesamtheit jedoch, dass jeder 20. Patient falsch behandelt wird. Dies gilt es in der Medizin zu vermeiden.

Bei Einsatz eines nicht heilenden Medikaments können Nebenwirkungen auftreten. Außerdem hat der irrtümliche Einsatz eines Medikaments eventuell zur Folge, dass eine alternative wirkende Therapie nicht durchgeführt wird. Beides wird für den Gesundheitszustand des Patienten nicht förderlich sein.

Diese Fehler dürfen in der Medizin nur äußerst selten vorkommen. Daher muss das Signifikanzniveau deutlich geringer sein.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist in der Regel kaum abschätzbar.

5.2.2

$$P(\text{Fehler 1. Art}) = \alpha = \frac{1}{1000}$$

$$B_{30;0,35}(\{k_r; k_r + 1; \dots; 30\}) = 1 - B_{30;0,35}(\{0; 1; \dots; k_r - 1\}) = 1 - F_{30;0,35}(k_r - 1) \leq 0,001$$

$$\Rightarrow F_{30;0,35}(k_r - 1) \geq 0,999$$

Tabelle: $F_{30;0,35}(18) = 0,9986$ $F_{30;0,35}(19) = 0,9996$ $\Rightarrow k_r - 1 = 19$ $\Rightarrow k_r = 20$

Entscheidungsregel:

Werden mindestens 20 Testpatienten (von insgesamt 30) gesund, nimmt das Forscherteam an, dass die Genesungen Therapieerfolge sind und nicht durch Selbstheilung hervorgerufen wurden.

Irrtumswahrscheinlichkeiten:

$$P(\text{Fehler 1. Art}) = \alpha = B_{30;0,35}(\{20; 21; \dots; 30\}) = 1 - F_{30;0,35}(19) = 1 - 0,9996 = 0,0004 = 0,04\%$$

$$P(\text{Fehler 2. Art}) = \beta = B_{30;0,6}(\{0; 1; \dots; 19\}) = F_{30;0,6}(19) = 0,7085 = 70,85\%$$

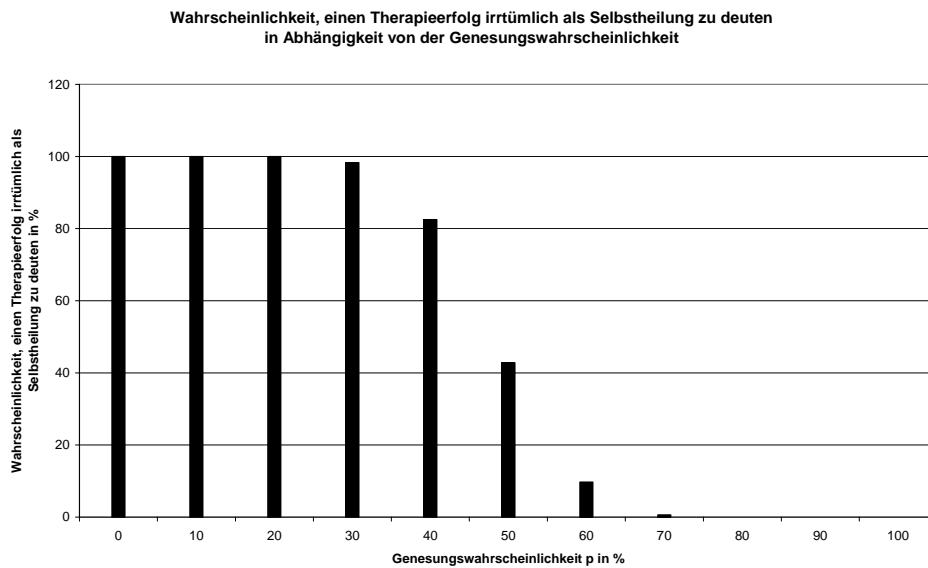
Das Forscherteam beschließt eine Erhöhung der Anzahl der Testpatienten:

Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 2. Art zu begehen, ist zu hoch: Mit 70,85% wird entschieden, dass die Genesungen keine Therapieerfolge sind, obwohl die Therapie für die Genesungen verantwortlich waren. Therapieerfolge werden also mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit als Selbstheilung gedeutet.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art ist nun gering genug. Beide Fehler bedingen sich jedoch. Wird α kleiner gewählt, wird β bei gleicher Stichprobenanzahl größer. Der einzige Weg, beide Fehler zu minimieren, ist eine Vergrößerung des Stichprobenumfangs.

5.3

Diagramm:



Deutung des Diagramms:

Je größer die Genesungswahrscheinlichkeit ist, desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit, dass man bei der Testentscheidung einen Fehler 2. Art begeht. Je besser die Therapie also anschlägt, desto geringer wird das Risiko, einen Therapieerfolg irrtümlich als Selbstheilung zu deuten.

Bei mehr als 60% Genesungswahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art praktisch fast Null. Hier kann das Forscherteam diesen Fehler bei der Testentscheidung also vernachlässigen.

Je besser die Therapie wirkt, desto wahrscheinlicher ist es demnach, dass die Wirkung der Therapie auch sicher nachgewiesen werden kann.