P1 Analysis, Geometrie, Stochastik

1.1

$f_a(x)=\frac{a}{9}x^2 \qquad g_a(x)=-\frac{1}{9a}x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right) \qquad x\in\Re,\ a\in\Re,\ a>0$

1.1.1

$P_a(x_p;\ y_p) \qquad x_p>0 \qquad Q_a(x_q;\ y_q) \qquad x_q<0$

Schnittpunkte von f_a und g_a

$$f_a(x)=g_a(x) \Leftrightarrow \frac{a}{9}x^2=-\frac{1}{9a}x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{9}x^2+\frac{1}{9a}x^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+1}{9a}x^2=\frac{a^2+1}{a} \Leftrightarrow x^2=9 \qquad (\text{da } a^2\neq -1)$$

$$\Rightarrow x_1=3 \text{ und } x_2=-3$$

$$f_a(3)=a \qquad f_a(-3)=a \qquad \Rightarrow \qquad P_a(3;a) \qquad Q_a(-3;a)$$

1.1.2

$P_2(3;\ 2) \qquad f_2(x)=\frac{2}{9}x^2 \qquad g_2(x)=-\frac{1}{18}x^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{2} \qquad y=mx+n$

1. Ableitungen:

$$f_2'(x)=\frac{4}{9}x \qquad g_2'(x)=-\frac{1}{9}x$$

Anstiege der Tangenten:

$$m_{f_2}=f_2'(3)=\frac{4}{3} \qquad m_{g_2}=g_2'(3)=-\frac{1}{3}$$

Winkel zwischen den Tangenten:

$$\tan\alpha=\frac{m_{f_2}-m_{g_2}}{1+m_{f_2}\cdot m_{g_2}}=\frac{\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}}=3 \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 71{,}57°$$

1.1.3

Fläche zwischen f_a und g_a:

$$A(a)=\int_{-3}^{3} g_a(x)-f_a(x)\,dx=\int_{-3}^{3} -\frac{1}{9a}x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)-\frac{a}{9}x^2\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3} -\frac{1+a^2}{9a}x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)dx=\left[-\frac{1+a^2}{27a}x^3+\left(a+\frac{1}{a}\right)x\right]_{-3}^{3}$$

$$=-\frac{1+a^2}{a}+3\left(a+\frac{1}{a}\right)-\frac{1+a^2}{a}+3\left(a+\frac{1}{a}\right)=-2\frac{1+a^2}{a}+6\frac{a^2+1}{a}=4\frac{a^2+1}{a}=4a+\frac{4}{a}$$

Ableitungen von A(a):

$$A'(a)=4-\frac{4}{a^2} \qquad A''(a)=\frac{8}{a^3}>0 \text{ für alle } a>0 \qquad \Rightarrow \text{Minimum}$$

Minimaler Flächeninhalt:

$$A'(a)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-\frac{4}{a^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2=1$$

$$\Rightarrow \quad a_1=-1 \text{ entfällt, da a > 0}$$

$$\Rightarrow \quad a_{Min}=1 \qquad A(1)=4+\frac{4}{1}=8$$

Der Flächeninhalt wird für a_{Min} = 1 minimal und beträgt dann 8 FE.

1.2

$$\text{g: } \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix} \qquad \text{h: } \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} \qquad \text{r, s} \in \Re$$

1.2.1

Ebene E(g,h):

$$\vec{n}_1=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\0\\-12\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3x+2z=d$$

$$P(5;-3;-4) \in \text{E(g,h)} \quad \Rightarrow \quad d=3\cdot 5+2\cdot(-4)=7 \quad \Rightarrow \quad \text{E(g,h): } 3x+2z=7$$

1.2.2

S(3; 1; -1)

Gleichung der Geraden k:

$$\text{k: } \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} \qquad t\in\Re \qquad (\text{Ortsvektor: } \overrightarrow{OS}\text{; Richtungsvektor: } \vec{n})$$

1.2.3

$$\text{g: } \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix} \qquad \text{h: } \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} \qquad \text{r, s} \in \Re \qquad M(1;2;2)$$

Ein Eckpunkt ist der Schnittpunkt der Geraden g und h:

$$\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 5-2r=2+2s \quad \Rightarrow 5-2r=2+(-3+4r) \quad \Rightarrow r=1$$

$$\Rightarrow \quad -3+4r=2s \qquad \Rightarrow -3+4=2s \quad \Rightarrow s=\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -4+3r=\tfrac{1}{2}-3s \qquad \Rightarrow -4+3=\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2} \Rightarrow -1=-1$$

$$\Rightarrow \quad A(3;1;-1)$$

C liegt auf der Diagonale $\overline{AC}$ und der Abstand zu A ist $2\left|\overrightarrow{AM}\right|$:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C(-1;3;5)$$

Ein weiterer Eckpunkt des Parallelogramms muss Schnittpunkt der Geraden h und g'(C,Richtungsvektor von g) sein:

$$g': \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \in \Re$$

Schnittpunkt h und g':

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2+2s=-1-2t \quad \Rightarrow 2+(3+4t)=-1-2t \quad \Rightarrow t=-1$$

$$\Rightarrow \quad 2s=3+4t \quad \Rightarrow 2s=3-4 \quad \Rightarrow s=-\tfrac{1}{2}$$

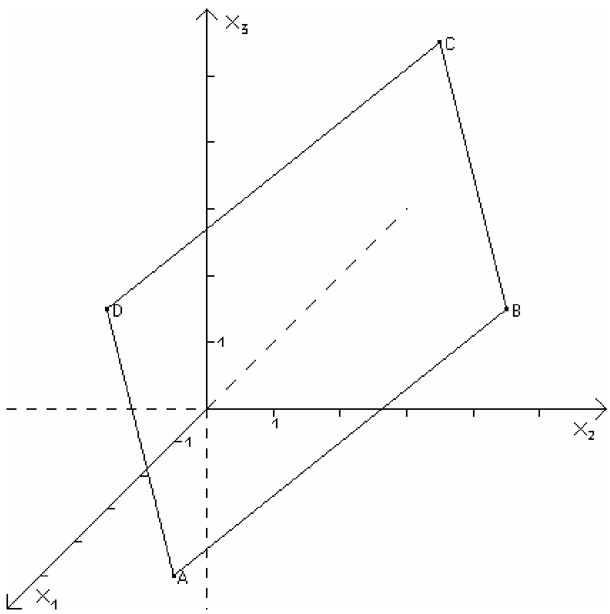
$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}-3s=5+3t \quad \Rightarrow 2=2$$

$$\Rightarrow \quad D(1;-1;2)$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B(1;5;2)$$

Die Eckpunkte des Parallelogramms sind: $A(3;1;-1)$, $B(1;5;2)$, $C(-1;3;5)$, $D(1;-1;2)$
(Es sind nur drei Eckpunkte gefordert.)

Zeichnung:



1.3.1

p = 0,25 X…Anzahl unverkäuflicher Pokale X ist $B_{25;0,25}$-verteilt (binomialverteilt mit n = 25 und p = 0,25)

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= 0,75^{25} + 25 \cdot 0,25 \cdot 0,75^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^{23} \approx 0,0321 = 3,21\%$$

$$P(B) = P(5 \le X < 8) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$

$$= \binom{25}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75^{20} + \binom{25}{6} \cdot 0,25^6 \cdot 0,75^{19} + \binom{25}{7} \cdot 0,25^7 \cdot 0,75^{18} \approx 0,5128 = 51,28\%$$

Erwartungswert:

$$E(X) = n \cdot p = 25 \cdot 0{,}25 = 6{,}25$$

Standardabweichung:

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} \approx 2{,}165$$

Der Erwartungswert sagt aus, um welchen Wert Stichprobenwerte im Mittel streuen werden. Die Standardabweichung gibt an, wie stark die Stichprobenwerte um den Mittelwert streuen. Im 1σ-Intervall sind die Stichprobenwerte mit großer Wahrscheinlichkeit anzutreffen.

⇒ Stichprobenwerte liegen mit hoher Wahrscheinlichkeit im Intervall [6,25 – 2,17; 6,25 + 2,17] = [4,08; 8,42].

⇒ Die Stichprobenwerte sind mit hoher Wahrscheinlichkeit 4, 5, 6, 7 oder 8.

1.3.2

X…Anzahl der richtigen Kugeln X ist hypergeometrisch verteilt

Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{49-6}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13983816} = \frac{5 \cdot 903}{4661272} = \frac{4515}{4661272} \approx 0{,}0969\%$$

P2 Analysis

2.1

Aufgaben 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 siehe Aufgaben 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3

2.1.4

$$g_3(x) = -\frac{1}{27}x^2 + \frac{10}{3}$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$g_3(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{27}x^2 + \frac{10}{3} = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = 90 \Rightarrow \quad x_1 = 3\sqrt{10} \text{ und } x_2 = -3\sqrt{10}$$

$$g_3(0) = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_1\left(3\sqrt{10}; 0\right) \quad P_2\left(-3\sqrt{10}; 0\right) \quad P_3\left(0; \frac{10}{3}\right)$$

Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_1P_2} \cdot \overline{OP_3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{10}{3} = 10\sqrt{10}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ beträgt $10\sqrt{10}$ FE.

2.2

$$f(x) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^2}{9}\right)$$

2.2.1

Definitionsbereich:

$x \in \Re, x \neq 0$

Symmetrie:

$$f(-x)=(-x)^2\cdot\ln\left(\frac{(-x)^2}{9}\right)=x^2\cdot\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)=f(x)$$

$\Rightarrow$ f ist eine gerade Funktion $\Rightarrow$ G ist axialsymmetrisch zur Ordinatenachse

2.2.2

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2\cdot\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x_{01}=3 \text{ und } x_{02}=-3 \quad (x=0 \text{ entfällt})$$

$$\Rightarrow \quad S_{x01}(3;0) \text{ und } S_{x02}(-3;0)$$

Es existiert kein Schnittpunkt mit der Ordinatenachse, da x = 0 nicht zum Definitionsbereich von f gehört.

Ableitungen:

$$f(x)=x^2\cdot\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)=x^2\cdot[2\ln x-\ln 9]$$

$$f'(x)=2x\cdot[2\ln x-\ln 9]+x^2\cdot\frac{2}{x}=2x\cdot[2\ln x-\ln 9+1]=2x\cdot\left[\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)+1\right]$$

$$f''(x)=2x\cdot[2\ln x-\ln 9+1]=2\cdot[2\ln x-\ln 9+1]+2x\cdot\frac{2}{x}=2\cdot[2\ln x-\ln 9+3]=2\cdot\left[\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)+3\right]$$

Extrempunkte:

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x\cdot\left[\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)+1\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(\frac{x^2}{9}\right)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{9}=\frac{1}{e} \quad\Leftrightarrow\quad x^2=\frac{9}{e}$$

$$\Rightarrow \quad x_{E1}=\frac{3\sqrt{e}}{e} \qquad f''\left(\frac{3\sqrt{e}}{e}\right)=2\cdot\left[\ln\left(\frac{1}{e}\right)+3\right]=2\cdot[-1+3]=4>0 \quad\Rightarrow \text{Minimum} \qquad f\left(\frac{3\sqrt{e}}{e}\right)=-\frac{9}{e}$$

$$\Rightarrow \quad x_{E2}=\frac{-3\sqrt{e}}{e} \qquad f''\left(\frac{-3\sqrt{e}}{e}\right)=2\cdot\left[\ln\left(\frac{1}{e}\right)+3\right]=2\cdot[-1+3]=4>0 \quad\Rightarrow \text{Minimum} \qquad f\left(\frac{-3\sqrt{e}}{e}\right)=-\frac{9}{e}$$

$$\Rightarrow \quad P_{Min1}\left(\frac{3\sqrt{e}}{e};-\frac{9}{e}\right) \qquad P_{Min2}\left(\frac{-3\sqrt{e}}{e};-\frac{9}{e}\right)$$

2.2.3

$$F(x)=x^3\left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)-\frac{2}{9}\right]$$

Ableitung von F(x) muss f(x) ergeben:

$$F(x)=x^3\left[\frac{2}{3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{2}{9}\right]=\frac{2}{3}x^3\left[\ln\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{3}\right]=\frac{2}{3}x^3\left[\ln x-\ln 3-\frac{1}{3}\right]$$

$$F'(x)=2x^2\left[\ln x-\ln 3-\frac{1}{3}\right]+\frac{2}{3}x^3\left[\frac{1}{x}\right]=x^2\left[2\ln\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{2}{3}\right]+\frac{2}{3}x^2=x^2\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)$$

2.2.4

$$S_{x01}(3;0) \qquad f(x)=x^2\cdot\ln\left(\frac{x^2}{9}\right) \qquad f'(x)=2x\cdot\left[\ln\left(\frac{x^2}{9}\right)+1\right] \qquad y=mx+n$$

Berechnung der Tangente:

$$m=f'(3)=6\cdot[\ln(1)+1]=6 \qquad 0=6\cdot 3+n \quad\Rightarrow\quad n=-18 \quad\Rightarrow\quad \text{t: } y=6x-18$$

W1 Analysis

$f_a(x) = \frac{ax-8}{x^2-2x}$ x ∈ ℜ, x ≠ 0, x ≠ 2, a ∈ ℜ, a > 0

1.1.1

Schnittpunkte mit der Abszissenachse:

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ax-8}{x^2-2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax-8=0 \quad \Rightarrow \quad x_{01} = \frac{8}{a}$$

Nenner von f_a wird für a = 4 gleich Null $\Rightarrow$ $x_{01} = \frac{8}{a}$ für a ∈ ℜ, a > 0, a ≠ 4

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax-8}{x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{a}{x}-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 0$$

Asymptoten:

Polasymptoten: x = 0 und x = 2

Waagerechte Asymptote: y = 0

1.1.2

0 < a < 4   Auf den Nachweis der Extremstellen mittels der 2. Ableitung kann verzichtet werden.

Ableitungen:

$$f_a'(x) = \frac{a(x^2-2x)-(ax-8)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-ax^2+16x-16}{(x^2-2x)^2}$$

Extremstellen:

$$f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-ax^2+16x-16}{(x^2-2x)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -ax^2+16x-16=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-\frac{16}{a}x+\frac{16}{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad x_{E1,E2} = \frac{8}{a} \pm \sqrt{\frac{64}{a^2}-\frac{16a}{a^2}} = \frac{8\pm 4\sqrt{4-a}}{a}$$

4 – a > 0, da a ∈]0; 4[$\Rightarrow$ Es existieren zwei Extremstellen.

1.1.3

$f_a(x) = \frac{ax-8}{x^2-2x}$ $f_b(x) = \frac{bx-8}{x^2-2x}$ x ∈ ℜ, x ≠ 0, x ≠ 2, a ∈ ℜ, a > 0, b ∈ ℜ, b > 0   und a ≠ b

Nachweis $f_a(x) \neq f_b(x)$ für a ≠ b:

$$f_a(x) = f_b(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ax-8}{x^2-2x} = \frac{bx-8}{x^2-2x}$$

$\Leftrightarrow$ $ax-8 = bx-8$

$\Leftrightarrow$ $ax = bx$ (da x ≠ 0 kann durch x dividiert werden)

$\Leftrightarrow$ $a = b$ $\Rightarrow$ Widerspruch

1.2

$f_3(x) = \frac{3x-8}{x^2-2x}$

1.2.1

2. Ableitung von f_a an einer Extremstelle:

$$f_a''(x_E)=\frac{-2ax+16}{\left(x^2-2x\right)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f_3''(x_E)=\frac{-6x+16}{\left(x^2-2x\right)^2}$$

Extrempunkte:

$$x_{E1,E2}=\frac{8\pm4\sqrt{4-3}}{3}=\frac{8\pm4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_{E1}=4 \qquad f_3''(4)=\frac{-24+16}{(16-8)^2}=-\frac{1}{8}<0 \qquad \Rightarrow \text{Maximum} \qquad f_3(4)=\frac{12-8}{16-8}=\frac{1}{2} \qquad P_{Max}\left(4;\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_{E1}=\frac{4}{3} \qquad f_3''\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{-\frac{24}{3}+16}{\left(\frac{16}{9}-\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{81}{8}>0 \qquad \Rightarrow \text{Minimum} \qquad f_3\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4-8}{\frac{16}{9}-\frac{8}{3}}=\frac{9}{2} \qquad P_{Min}\left(\frac{4}{3};\frac{9}{2}\right)$$

1.2.2

$$\frac{3x-8}{x^2-2x}=\frac{b}{x}-\frac{c}{x-2} \qquad x\in\Re,\ x\neq0,\ x\neq2,\ b\in\Re,\ b\in\Re$$

Berechnung von b und c:

$$\frac{3x-8}{x^2-2x}=\frac{b}{x}-\frac{c}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x-8}{x(x-2)}=\frac{b}{x}-\frac{c}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-8=b(x-2)-cx$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-8=(b-c)x-2b$$

Koeffizientenvergleich $\Rightarrow \quad b-c=3 \quad \Rightarrow \quad 4-c=3 \quad \Rightarrow \quad c=1$

$$\Rightarrow \quad -2b=-8 \quad \Rightarrow \quad b=4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x-8}{x^2-2x}=\frac{4}{x}-\frac{1}{x-2}$$

1.2.3

Stammfunktion von f_3:

$$F(x)=\int\frac{3x-8}{x^2-2x}dx=\int\frac{4}{x}-\frac{1}{x-2}dx=4\ln|x|-\ln|x-2|+c \qquad \text{mit } c\in\Re$$

Flächeninhalt:

$$A=\int_3^6 f_3(x)\,dx=F(6)-F(3)=4\ln|6|-\ln|4|-4\ln|3|+\ln|1|=4\ln\frac{6}{3}-2\ln2=2\ln2$$

Der Flächeninhalt beträgt 2ln2 FE.

1.3

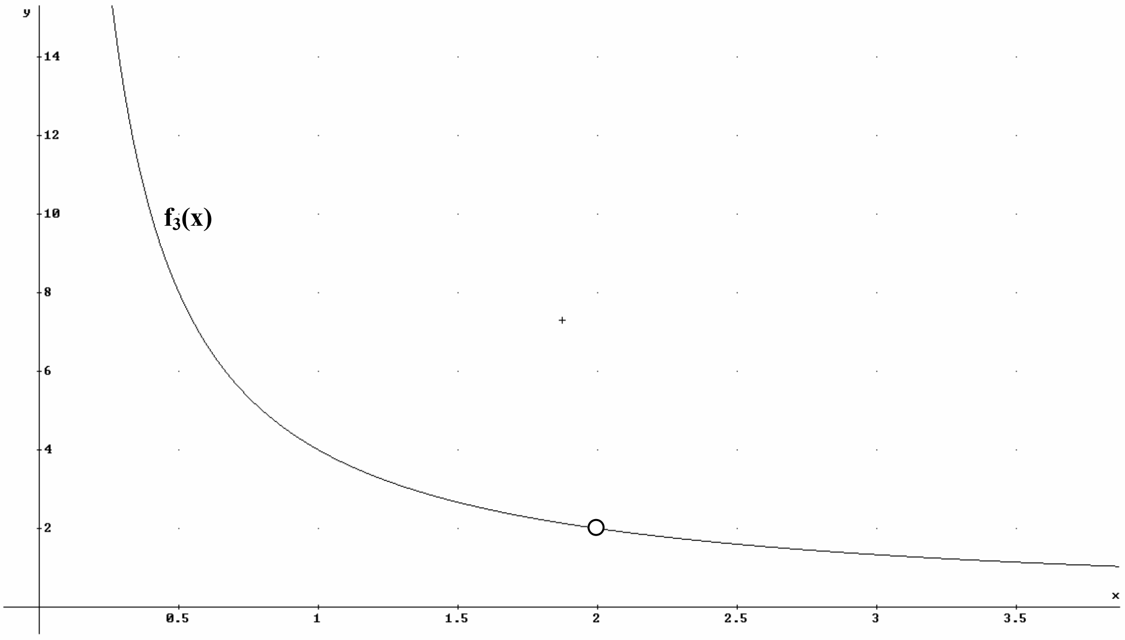
$$f_4(x)=\frac{4x-8}{x^2-2x}=\frac{4(x-2)}{x(x-2)}=\frac{4}{x} \qquad \text{für } x\neq2 \qquad x_0=2$$

Grenzwert:

$$\lim_{x\to2}f_4(x)=\lim_{x\to2}\frac{4}{x}=\frac{4}{2}=2$$

$\Rightarrow$ Bei $x_0=2$ existiert eine hebbare Unstetigkeitsstelle, eine Lücke.

Skizze:



W2 Analysis

$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x}$ x ∈ ℜ, 0 ≤ x ≤ k^2, k ∈ ℜ, k > 0

2.1

$V = \frac{64\pi}{192}$ VE

Nullstellen von f_k:

$$f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{01} = 0 \text{ und } x_{02} = k^2$$

Bestimmung von k:

$$V = \pi \int_0^{k^2} \left[f_k(x)\right]^2 dx = \pi \int_0^{k^2} \left[\frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x}\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{k^2} \frac{x^2}{16k^2}\left(k^2 - x\right) dx = \frac{\pi}{16k^2} \int_0^{k^2} k^2 x^2 - x^3 dx$$

$$= \frac{\pi}{16k^2}\left[\frac{k^2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{k^2} = \frac{\pi}{16k^2}\left[\frac{1}{3}k^8 - \frac{1}{4}k^8\right]$$

$$= \frac{\pi}{16k^2} \cdot \frac{1}{12}k^8 = \frac{\pi k^6}{192}$$

$$V = \frac{64\pi}{192} \text{ VE} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi k^6}{192} = \frac{64\pi}{192} \quad \Rightarrow \quad k^6 = 64 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -2 \text{ entfällt, da k > 0}$$

$$\Rightarrow \quad k_2 = 2$$

Für k = 2 beträgt das Volumen des Rotationskörpers $\frac{64\pi}{192}$ VE.

2.2

Gesucht ist der Extrempunkt von f_k, bei ihm wird der maximale Durchmesser erreicht.

Ableitungen:

$$f_k'(x)=\frac{1}{4k}\sqrt{k^2-x}-\frac{x}{4k}\frac{1}{2\sqrt{k^2-x}}=\frac{2k^2-2x-x}{8k\sqrt{k^2-x}}=\frac{2k^2-3x}{8k\sqrt{k^2-x}}$$

$$f_k''(x_E)=\frac{-3}{8k\sqrt{k^2-x_E}}<0 \qquad \text{für alle } x_E \qquad \Rightarrow \text{Maximum}$$

Extremstelle:

$$f_k'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2k^2-3x}{8k\sqrt{k^2-x}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2k^2-3x=0 \quad\Rightarrow\quad x_E=\frac{2}{3}k^2$$

(Nenner von $f_k \neq 0$)

Maximaler Durchmesser:

$$d_{Max}=2f_k\left(\frac{2}{3}k^2\right)=\frac{k^2}{3k}\sqrt{k^2-\frac{2}{3}k^2}=\frac{k}{3}\sqrt{\frac{1}{3}k^2}=\frac{k^2}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}k^2$$

Der maximale Durchmesser beträgt $\frac{\sqrt{3}}{9}k^2$ LE.

2.3

$$f_k'(x)=\frac{2k^2-3x}{8k\sqrt{k^2-x}}$$

Winkel der Tangente mit der Abszissenachse:

$$f_k'(0)=\frac{2k^2}{8k\sqrt{k^2}}=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \tan\alpha=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 14{,}04°$$

2.4

$$x_S=\frac{\pi\int_a^b x\left[f_k(x)\right]^2 dx}{V} \qquad V=\frac{\pi k^6}{192}$$

Berechnung von x_S:

$$x_S=\frac{\pi\int_a^b x\left[f_k(x)\right]^2 dx}{V}=\frac{\pi\int_0^{k^2} x\left[\frac{x}{4k}\sqrt{k^2-x}\right]^2 dx}{V}=\frac{\pi\int_0^{k^2} x\frac{x^2}{16k^2}\left(k^2-x\right)dx}{\frac{\pi k^6}{192}}=\frac{192}{16k^8}\int_0^{k^2}x^3\left(k^2-x\right)dx$$

$$=\frac{12}{k^8}\int_0^{k^2}k^2x^3-x^4dx=\frac{12}{k^8}\left[\frac{k^2}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right]_0^{k^2}=\frac{12}{k^8}\left(\frac{k^{10}}{4}-\frac{k^{10}}{5}\right)=\frac{12}{k^8}\frac{k^{10}}{20}=\frac{3}{5}k^2$$

Die Abszisse x_S des Schwerpunktes des Rotationskörpers beträgt $\frac{3}{5}k^2$.

2.5

$$f_3(x)=\frac{x}{12}\sqrt{9-x} \qquad \text{Zylinder: } r=\frac{1}{2};\ h=6$$

Der maximale Durchmesser des Körpers beträgt $\frac{\sqrt{3}}{9}k^2=\frac{\sqrt{3}}{9}3^2=\sqrt{3}$ LE.

$\sqrt{3} < 6 \quad \Rightarrow$ Der Zylinder passt nicht hinein, wenn ein Radius und die Abszissenachse parallel sind.

$\Rightarrow$ Die Höhe des Zylinders (genauer: die Mittellinie) muss auf der Abszissenachse liegen.

Die Funktion f_3 hat ein Maximum und sonst keine Extremwerte und Wendepunkte. Außerdem ist f_3 stetig. Deshalb passt der Zylinder hinein, wenn es 2 Funktionswerte $f_3(x_1)$ und $f_3(x_1+6)$ existieren, für die gilt: $f_3(x_1) \geq \frac{1}{2}$ und $f_3(x_1+6) \geq \frac{1}{2}$.

Lösung durch Ausprobieren von Funktionswerten von f_3:

$f_3(1) = \frac{1}{12}\sqrt{8} \approx 0{,}2357 < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ zu klein

$f_3(2) = \frac{2}{12}\sqrt{7} \approx 0{,}4410 < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ zu klein

$f_3(3) = \frac{3}{12}\sqrt{6} \approx 0{,}6124 > \frac{1}{2} \qquad f_3(9) = \frac{9}{12}\sqrt{0} = 0 < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ zu klein

$f_3\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{24}\sqrt{\frac{13}{2}} \approx 0{,}5311 > \frac{1}{2} \qquad f_3\left(\frac{17}{2}\right) = \frac{17}{24}\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}5009 > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ Der Zylinder passt hinein.

Ansatz über Lösen einer Gleichung:

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{12}\sqrt{9-x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x\sqrt{9-x} = 6 \quad \Rightarrow \quad x^2(9-x) = 36$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 9x^2 + 36 = 0$$

Bestimmen einer Nullstelle der Gleichung mit einem Näherungsverfahren

Gewähltes Näherungsverfahren: Newton $\quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 36 \qquad f'(x) = 3x^2 - 18x$

Schätzen von x_1: $\quad x_1 = 2 \quad x_2 = 2{,}3333 \quad x_3 = 2{,}3218 \quad x_4 = 2{,}3218$

$\Rightarrow \quad f_3(2{,}33+6) = f_3(8{,}33) \approx 0{,}5682 \quad \Rightarrow$ Der Zylinder passt hinein.

W3 Analytische Geometrie

A(3; 2; 1), B(1; 6; -1), C(-1; 4; 3), S(11; 12; 13) Pyramide ABCS mit Grundfläche ABC

3.1

Dreieck ABC gleichseitig:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \qquad \left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$\Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| \quad \Rightarrow$ Dreieck ABC ist gleichseitig.

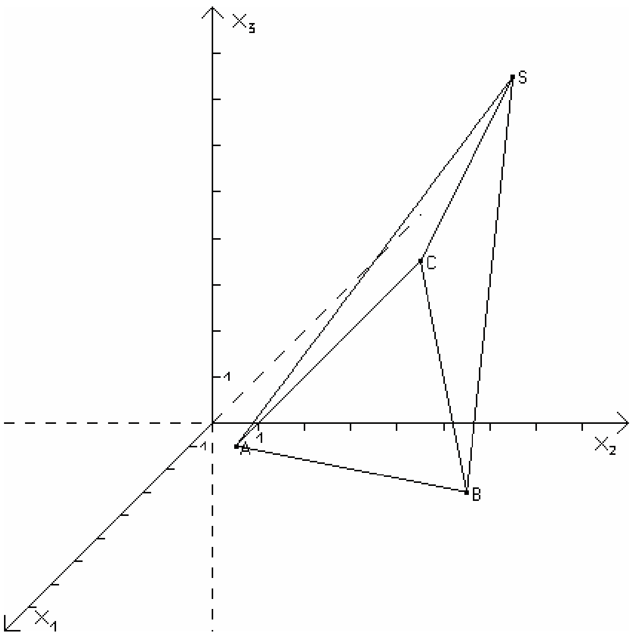
Ebenengleichung E_1(ABC):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_1(ABC):\ x + y + z = d$$

$A \in E_1(ABC) \quad \Rightarrow \quad d = 3 + 2 + 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad E_1(ABC):\ x + y + z = 6$

Zeichnung:

Unsichtbare Kanten: $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CS}$



3.2

E_2: $2x-13y+17z+3=0$

Gerade h(BS):

h(BS): $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}10\\6\\14\end{pmatrix}$ mit $r\in\mathfrak{R}$

Schnittpunkt D von h(BS) mit E_2:

$2\cdot(1+10r)-13\cdot(6+6r)+17\cdot(-1+14r)+3=0 \quad\Rightarrow\quad 180r=90 \quad\Rightarrow\quad r=\frac{1}{2}$

r ∈ [0; 1] ⇒ Schnittpunkt D liegt auf Kante $\overline{BS}$

$\Rightarrow \quad D(6;9;6)$

Pyramide ABCS wird in zwei Pyramiden ABCD und ACDS zerlegt.
(Es ist nur die Berechnung des Volumens eines Teilkörpers gefordert.)

$$V_{ABCD}=\left|\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AD}\right|=\left|\frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot180=30$$

$$V_{ACDS}=\left|\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\bullet\overrightarrow{AS}\right|=\left|\frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}8\\10\\12\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\26\\-34\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}8\\10\\12\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot(-180)\right|=30$$

Winkel zwischen E_1 und E_2: E_1: $x+y+z=6$ E_2: $2x-13y+17z+3=0$

$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-13\\17\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-13\\17\end{pmatrix}\right|}=\frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{462}}\approx0{,}1612\Rightarrow \qquad \alpha\approx80{,}73°$$

3.3

Ein solcher Zylinder existiert, wenn der Abstand des Lotes von S auf die Ebene E_1 vom Mittelpunkt des Umkreises nicht größer als der Radius des Zylinders ist.

Mittelpunkt $M(x_M; y_M; z_M)$ des Umkreises:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{BM}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{pmatrix} x_M-3 \\ y_M-2 \\ z_M-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x_M-1 \\ y_M-6 \\ z_M+1 \end{pmatrix}\right|$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{(x_M-3)^2+(y_M-2)^2+(z_M-1)^2} = \sqrt{(x_M-1)^2+(y_M-6)^2+(z_M+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad (x_M-3)^2+(y_M-2)^2+(z_M-1)^2 = (x_M-1)^2+(y_M-6)^2+(z_M+1)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad -6x_M+9-4y_M+4-2z_M+1 = -2x_M+1-12y_M+36+2z_M+1$$

$$\Leftrightarrow\quad 4x_M-8y_M+4z_M = -24$$

$$\Leftrightarrow\quad x_M-2y_M+z_M = -6$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{CM}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{pmatrix} x_M-3 \\ y_M-2 \\ z_M-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x_M+1 \\ y_M-4 \\ z_M-3 \end{pmatrix}\right|$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{(x_M-3)^2+(y_M-2)^2+(z_M-1)^2} = \sqrt{(x_M+1)^2+(y_M-4)^2+(z_M-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad (x_M-3)^2+(y_M-2)^2+(z_M-1)^2 = (x_M+1)^2+(y_M-4)^2+(z_M-3)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad -6x_M+9-4y_M+4-2z_M+1 = 2x_M+1-8y_M+16-6z_M+9$$

$$\Leftrightarrow\quad 8x_M-4y_M-4z_M = -12$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x_M-y_M-z_M = -3$$

$$M \in E_1 \quad\Leftrightarrow\quad x_M+y_M+z_M = 6$$

Gleichungssystem:

$$x_M-2y_M+z_M=-6 \;\Rightarrow\; x_M = 2y_M-z_M-6 \qquad\qquad \Rightarrow\quad x_M = 1$$

$$2x_M-y_M-z_M=-3 \;\Rightarrow\; 2(2y_M-z_M-6)-y_M-z_M=-3 \;\Rightarrow\; 3y_M-3z_M=9 \;\Rightarrow\; y_M-z_M=3 \;\Rightarrow\quad z_M=1$$

$$x_M+y_M+z_M=6 \;\Rightarrow\; (2y_M-z_M-6)+y_M+z_M=6 \;\Rightarrow\; 3y_M=12 \;\Rightarrow\; y_M=4$$

$$\Rightarrow\quad M(1;4;1)$$

Radius des Umkreises:

$$r = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{2}$$

Lot (Fußpunkt) F von S auf E_1:

$$E_1\colon\; x+y+z=6 \qquad \vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k(S;\, \vec{n}_{E1})\colon\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \Re$$

Schnittpunkt von k mit E_1:

$$(11+s)+(12+s)+(13+s)=6 \quad\Rightarrow\quad 3s=-30 \quad\Rightarrow\quad s=-10 \;\Rightarrow\quad F(1;2;3)$$

Abstand des Lotes von S auf die Ebene E_1 vom Mittelpunkt des Umkreises:

$$\left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{2} = r$$

$\Rightarrow$ Es lässt sich ein gerader Zylinder finden, der die Fläche des Umkreises des Dreiecks ABC als Grundfläche hat und die Pyramide ABCS umfasst.

3.4

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}$ mit $t \in \Re$ $S_1, S_2 \in g$ $V_{ABCS_1} = V_{ABCS_2} = V_{ABCS}$ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

Volumen der Pyramide ABCS:

$$V_{ABCS} = \left|\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right] \bullet \overrightarrow{AS}\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = 60 \qquad \text{Oder: } V_{ABCS} = V_{ABCD} + V_{ACDS} = 30 + 30 = 60$$

Volumina der Pyramiden ABCS$_1$ und ABCS$_2$:

$$V_{ABCS_{1,2}} = \left|\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right] \bullet \overrightarrow{AS_{1,2}}\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_{S1} - 3 \\ y_{S1} - 2 \\ z_{S1} - 1 \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_{S1,2} - 3 \\ y_{S1,2} - 2 \\ z_{S1,2} - 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= 2\left|x_{S1,2} - 3 + y_{S1,2} - 2 + z_{S1,2} - 1\right| = 2\left|x_{S1,2} + y_{S1,2} + z_{S1,2} - 6\right|$$

$V_{ABCS_1} = V_{ABCS_2} = V_{ABCS}$ und $S_1, S_2 \in g$

$$2\left|x_{S1} + y_{S1} + z_{S1} - 6\right| = 60 \Leftrightarrow \left|-1 + t + 14 - 6t + 8 - 10t - 6\right| = 30 \Leftrightarrow \left|15 - 15t\right| = 30 \Leftrightarrow \left|1 - t\right| = 2$$

$$\Rightarrow 1 - t = 2 \Rightarrow t_1 = -1 \Rightarrow S_1(-2;20;18)$$

$$\Rightarrow -1 + t = 2 \Rightarrow t_2 = 3 \Rightarrow S_1(2;-4;-22)$$

Die zwei gesuchten Punkte sind $S_1(-2;20;18)$ und $S_1(2;-4;-22)$.

W4 Stochastik

$p_{Nico} = 0,6$ $p_{Rene} = 0,75$ Behauptung: $p_{Tim} \geq 0,85$ Einsatz: 2,50 € für 10 Würfe
X…Anzahl der Treffer   Y…Anzahl der Würfe, die daneben gehen   X = 10 – Y

4.1

n = 10   X ist $B_{10;0,6}$-verteilt   (binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,6)

Wahrscheinlichkeiten laut Tabelle:

$$P(A) = P(Y = 4) = P(X = 6) = B_{10;0,6}(\{6\}) = 25,1\%$$

$$P(B) = P(X \geq 6) = B_{10;0,6}(\{6\}) + B_{10;0,6}(\{7\}) + B_{10;0,6}(\{8\}) + B_{10;0,6}(\{9\}) + B_{10;0,6}(\{10\}) = 63,3\%$$

$$P(C) = P(3 < X < 9) = B_{10;0,6}(\{4\}) + B_{10;0,6}(\{5\}) + B_{10;0,6}(\{6\}) + B_{10;0,6}(\{7\}) + B_{10;0,6}(\{8\}) = 89,9\%$$

4.2

Linksseitiger Signifikanztest:
H_0: p = 0,85 H_1: p < 0,85
Y…Anzahl der Würfe, die daneben gingen
X…Anzahl der Treffer
H_0 wahr $\Rightarrow$ X ist $B_{10;\,0,85}$-verteilt   (binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,85)
$\overline{A} = \{0;1;...;7\}$ (Y ≥ 3 ⇒ X ≤ 7)

$$P(X \leq 7) = B_{10;0,85}(\{0;1;...;7\}) = 0,179 = 17,9\%$$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt 17,9%. Es handelt sich hierbei um die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen, also um das Signifikanzniveau.

4.3

Linksseitiger Signifikanztest:

H_0: p = 0,85 H_1: p < 0,85

X…Anzahl der Treffer

H_0 wahr ⇒ X ist $B_{10;\,0,85}$-verteilt (binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,85)

$\alpha = 0,05$

$\overline{A} = \{0;1;...;k_l\}$

$P(X \leq k) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad B_{10;0,85}\left(\{0;1;...;k_l\}\right) \leq 0,05$

$B_{10;0,85}\left(\{0;1;...;6\}\right) = 0,049 \qquad B_{10;0,85}\left(\{0;1;...;7\}\right) = 0,179 \qquad \Rightarrow \qquad k_l = 6 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = \{0;1;...;6\}$

⇒ Bei 0, 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Treffern wird Tims Behauptung mit höchstens 5%iger Wahrscheinlichkeit abgelehnt.
(Fragestellung ist irreführend und nicht durchdacht.)

4.4

n = 10 $\quad p_{Nico} = 0,6 \qquad p_{Rene} = 0,75 \qquad p_{Tim} = 0,85$ $\qquad$ D = „Alle drei Jungen werfen höchstens einmal daneben.“

Wahrscheinlichkeiten:

$$P_{Nico}(Y \leq 1) = P_{Nico}(X \geq 9) = B_{10;0,6}\left(\{9\}\right) + B_{10;0,6}\left(\{10\}\right) = 4,6\%$$

$$P_{Rene}(Y \leq 1) = P_{Rene}(X \geq 9) = B_{10;0,75}\left(\{9\}\right) + B_{10;0,75}\left(\{10\}\right) = 24,4\%$$

$$P_{Tim}(Y \leq 1) = P_{Tim}(X \geq 9) = B_{10;0,85}\left(\{9\}\right) + B_{10;0,85}\left(\{10\}\right) = 54,4\%$$

$$P(D) = P_{Nico}(X \geq 9) \cdot P_{Rene}(X \geq 9) \cdot P_{Tim}(X \geq 9) = 0,046 \cdot 0,244 \cdot 0,544 \approx 0,61\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Jungen höchstens einmal daneben werfen, beträgt 0,61%.

Die Fragestellung sollte klarer formuliert sein: Es könnte eventuell auch gemeint sein, dass alle Jungen zusammen höchstens einmal daneben werfen.
E = „Alle drei Jungen werfen zusammen höchstens einmal daneben.“

$$P(E) = \begin{pmatrix} P_{Nico}(X=10) \cdot P_{Rene}(X=10) \cdot P_{Tim}(X=10) \\ +P_{Nico}(X=9) \cdot P_{Rene}(X=10) \cdot P_{Tim}(X=10) \\ +P_{Nico}(X=10) \cdot P_{Rene}(X=9) \cdot P_{Tim}(X=10) \\ +P_{Nico}(X=10) \cdot P_{Rene}(X=10) \cdot P_{Tim}(X=9) \end{pmatrix} \approx 0,085\%$$

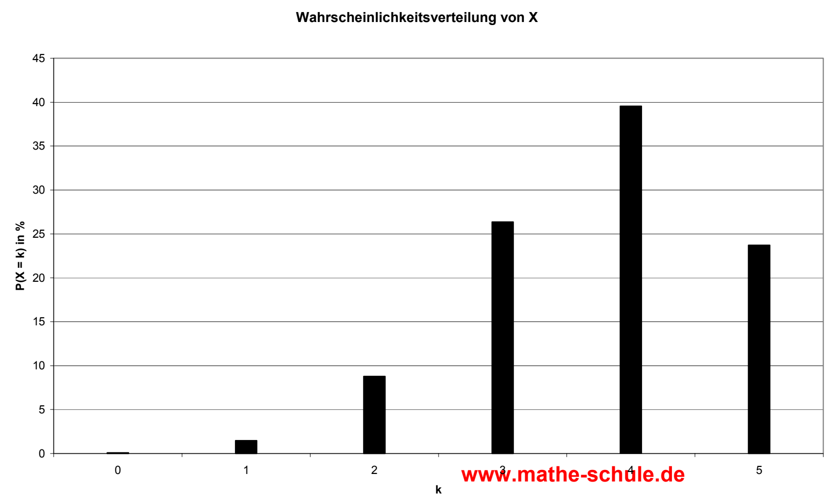
4.5.1

X ist $B_{5;\,0,75}$-verteilt. $\qquad B_{5;075}\left(X = k\right) = \binom{5}{k} \cdot 0,75^k \cdot 0,25^{5-k}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

K	0	1	2	3	4	5
$B_{5;075}\left(X = k\right)$ in %	0,098	1,465	8,789	26,367	39,551	23,730

Diagramm:



4.5.2

Bernoullikette der Länge n = 5 mit p = 0,75

Möglichkeiten der Simulation:

- 5-maliges Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen;
  In der Urne befinden sich 3 blaue Kugeln und eine rote Kugel.
  Als Erfolg wird das Ziehen einer blauen Kugel gewertet.
  Zufallsgröße X ist die Anzahl der insgesamt gezogenen blauen Kugeln.
- 5-maliges Drehen eines Glücksrades.
  Das Glücksrad ist in 4 Sektoren mit den Aufschriften 1, 2, 3, 5 eingeteilt.
  Jeder Sektor nimmt 90° des Vollkreises ein.
  Als Erfolg wird das Drehen einer Primzahl gewertet.
  Zufallsgröße X ist die Anzahl der insgesamt gedrehten Primzahlen.

4.6

p = 0,96 $\quad P(Y \le 1) = 0{,}99 \;\Rightarrow\; P(X \ge n-1) = 0{,}99$ $\quad$ X ist $B_{n;0,96}$-verteilt

Berechnung von n:

$$P(X \ge n-1) = 0{,}99$$

$$\Rightarrow \quad B_{n;0,96}(\{n-1\}) + B_{n;0,96}(\{n\}) = 0{,}99$$

$$\Rightarrow \quad \binom{n}{n-1} \cdot 0{,}96^{n-1} \cdot 0{,}04 + \binom{n}{n} \cdot 0{,}96^{n} \cdot 0{,}04^{0} = 0{,}99$$

$$\Rightarrow \quad n \cdot 0{,}96^{n-1} \cdot 0{,}04 + 0{,}96^{n} = 0{,}99$$

Probieren:

$$2 \cdot 0{,}96^{1} \cdot 0{,}04 + 0{,}96^{2} \approx 0{,}9984$$
$$3 \cdot 0{,}96^{2} \cdot 0{,}04 + 0{,}96^{3} \approx 0{,}9953$$
$$4 \cdot 0{,}96^{3} \cdot 0{,}04 + 0{,}96^{4} \approx 0{,}9909$$
$$5 \cdot 0{,}96^{4} \cdot 0{,}04 + 0{,}96^{5} \approx 0{,}9852$$

Ein Werfer mit der Trefferquote 96% muss mindestens viermal werfen, damit er mit <u>mindestens</u> 99% Wahrscheinlichkeit höchstens einmal daneben wirft.
Da die Abweichungen von 0,99 bei n = 4 sehr gering sind, muss ein Werfer mit der Trefferquote 96% mindestens viermal werfen, damit er mit 99% Wahrscheinlichkeit höchstens einmal daneben wirft.