

P1 Analysis, analytische Geometrie, Stochastik

1.1

$$f_a(x) = x^4 + 4x^3 - 4ax + a \quad x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$$

1.1.1

Ableitungen:

$$f_a'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4a \quad f_a''(x) = 12x^2 + 24x \quad f_a'''(x) = 24x + 24$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f_a''(x) = 0 &\Leftrightarrow 12x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow 12x(x+2) = 0 \\ \Rightarrow x_{W1} = 0 &\quad f_a'''(0) = 24 > 0 \quad \text{konkav} \rightarrow \text{konvex} \quad f_a(0) = a \\ \Rightarrow x_{W2} = -2 &\quad f_a'''(-2) = -24 < 0 \quad \text{konvex} \rightarrow \text{konkav} \quad f_a(-2) = -16 + 9a \end{aligned}$$

$$P_{W1}(0; a) \quad P_{W2}(-2; -16 + 9a)$$

1.1.2

Abstand zwischen den Wendepunkten:

$$d(a) = \sqrt{(0+2)^2 + (a+16-9a)^2} = \sqrt{4 + (16-8a)^2} = \sqrt{4 + 64(4-4a+a^2)} = \sqrt{260 - 256a + 64a^2}$$

$d(a)$ wird minimal, wenn $[d(a)]^2 =: d_2(a)$ minimal wird.

$$d_2(a) = 260 - 256a + 64a^2 \quad d_2'(a) = -256 + 128a \quad d_2''(a) = 128 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$d_2'(a) = 0 \Leftrightarrow -256 + 128a = 0 \Rightarrow a_{Min} = 2$$

Alternative: $d(a) = \sqrt{(0+2)^2 + (a+16-9a)^2} = \sqrt{4 + (16-8a)^2}$ wird minimal, wenn der Radikant minimal wird
 $\Rightarrow 4 + (16-8a)^2$ muss ein Minimum annehmen $\Rightarrow 16-8a = 0 \Rightarrow a_{Min} = 2$

Für $a = 2$ haben die Wendepunkte den kleinsten Abstand voneinander.

1.1.3

$$f_0(x) = x^4 + 4x^3 \quad x \in \mathbb{R}$$

Nullstellen:

$$f_0(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x+4) = 0 \Rightarrow x_{01} = 0 \text{ und } x_{02} = -4$$

Flächeninhalt:

$$F = \left| \int_{-4}^0 f_0(x) dx \right| = \left| \int_{-4}^0 x^4 + 4x^3 dx \right| = \left| \left[\frac{x^5}{5} + x^4 \right]_{-4}^0 \right| = \left| 0 - \frac{256}{5} \right| = \frac{256}{5} = 51 \frac{1}{5} = 51,2$$

Der Flächeninhalt beträgt 51,2 FE.

1.2

$$g'(x) < g'(x_p) \quad \text{für alle } x < x_p \quad g'(x) < g'(x_p) \quad \text{für alle } x > x_p$$

\Rightarrow Der Graph von g' hat bei x_p ein Maximum \Rightarrow Der Graph von g hat bei x_p einen Wendepunkt.

1.3

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad D(0; 0; 0), A(5; 5; 0), B(0; 5; 5), C(5; 0; 5)$$

1.3.1

Angabe der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} in Abhängigkeit von \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} :

$$\vec{a} = \overrightarrow{DA} = \vec{u} + \vec{v} \quad \vec{b} = \overrightarrow{DB} = \vec{v} + \vec{w} \quad \vec{c} = \overrightarrow{DC} = \vec{u} + \vec{w}$$

1.3.2

Angabe von \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} als Linearkombination von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} : (Es ist nur ein Vektor verlangt.)

$$\begin{aligned} \vec{b} = \vec{v} + \vec{w} &\Rightarrow \vec{v} = \vec{b} - \vec{w} \\ \vec{c} = \vec{u} + \vec{w} &\Rightarrow \vec{w} = \vec{c} - \vec{u} \\ \vec{a} = \vec{u} + \vec{v} &\Rightarrow \vec{u} = \vec{a} - \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} = \vec{a} - \vec{v} = \vec{a} - (\vec{b} - \vec{w}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{w} = \vec{a} - \vec{b} + (\vec{c} - \vec{u}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{u} \\ \Rightarrow 2\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{w} = \vec{b} - (\vec{c} - \vec{u}) = \vec{b} - \vec{c} + \vec{u} = \vec{b} - \vec{c} + \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{w} = \vec{c} - \vec{u} = \vec{c} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

1.3.3

Ebene $\varepsilon(DAB)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -25 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x - y + z = d \\ D(0; 0; 0) \in \varepsilon(DAB) \quad \Rightarrow \quad d = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(DAB): x - y + z = 0 \end{aligned}$$

$P(2; 4; z) \in \varepsilon(DAB)$:

$$2 - 4 + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2$$

1.4

Bernoullikette mit Länge n und $p = 0,3$ X ...Anzahl der Erfolge $B_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

1.4.1

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = B_{20;0,3}(7) \approx 16,43\% \quad P(B) = B_{10;0,3}(3) + B_{10;0,3}(4) + B_{10;0,3}(5) \approx 56,99\%$$

1.4.2

n = 5	n = 15
$\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,3 = 1,5$	$\mu = n \cdot p = 15 \cdot 0,3 = 4,5$
$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{5 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = \sqrt{1,05} \approx 1,025$	$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = \sqrt{3,15} \approx 1,775$
$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [-0,55; 3,55] \Rightarrow X \in \{0; 1; 2; 3\}$	$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [0,95; 8,05] \Rightarrow X \in \{1; 2; \dots; 8\}$

1.4.3

Rechnerisch:

$$\begin{aligned}
 [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] &= \left[n \cdot p - 2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}; n \cdot p + 2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \right] \\
 &= \left[n \cdot 0,3 - 2 \cdot \sqrt{n \cdot 0,3 \cdot 0,7}; n \cdot 0,3 + 2 \cdot \sqrt{n \cdot 0,3 \cdot 0,7} \right] \\
 &= \left[\frac{3}{10}n - 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{10} \sqrt{n}; \frac{3}{10}n + 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{10} \sqrt{n} \right] \in [0; n]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10}n - 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{10} \sqrt{n} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{10}n \geq 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{10} \sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2\sqrt{21}}{3} \Leftrightarrow n \geq 9\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10}n + 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{10} \sqrt{n} \leq n \Leftrightarrow \frac{7}{10}n \geq 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{10} \sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2\sqrt{21}}{7} \Leftrightarrow n \geq 1\frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow n \geq 9\frac{1}{3} \Rightarrow n \geq 10 \Rightarrow \text{Ab } n = 10 \text{ ist das } 2\sigma\text{-Intervall vollständig in } [0; n] \text{ enthalten.}$$

Probieren:

$$n = 9 \Rightarrow [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [2,7 - 2 \cdot \sqrt{1,89}; 2,7 + 2 \cdot \sqrt{1,89}] = [-0,05; 5,45] \notin [0; 9]$$

$$n = 10 \Rightarrow [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [3 - 2 \cdot \sqrt{2,1}; 3 + 2 \cdot \sqrt{2,1}] = [0,10; 5,90] \in [0; 10]$$

$$\Rightarrow \text{Ab } n = 10 \text{ ist das } 2\sigma\text{-Intervall vollständig in } [0; n] \text{ enthalten.}$$

P2 Analysis

2.1

Aufgaben 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2 siehe Aufgaben 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.2

2.3.1

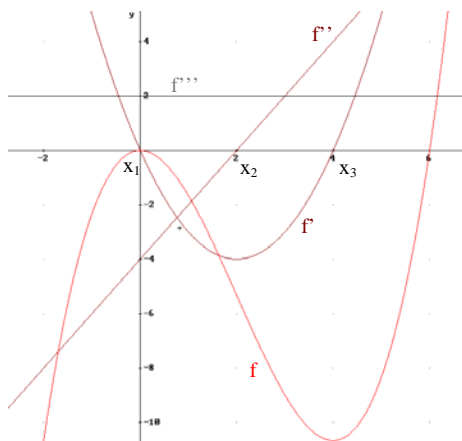
Monotonieverhalten:

f streng monoton steigend	für $x < x_1$	
f streng monoton fallend	für $x_1 < x < x_3$	
f streng monoton steigend	für $x > x_3$	
Maximumstelle x_1	Wendestelle x_2	Minimumstelle x_3

Krümmungsverhalten:

f konkav für $x < x_2$	f konvex für $x > x_2$
------------------------	------------------------

Möglicher Verlauf des Graphen von f:



2.3.2

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b \quad f'''(x) = 6a \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestellenkandidaten sind Wendestellen}$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6ax + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_w = -\frac{b}{3a} \quad (\text{Division möglich, da } a \neq 0)$$

\Rightarrow Es existiert genau eine Wendestelle.

2.4

$$w(x) = \sqrt{12 - 2x} \quad x \in \mathbb{R}, x \leq 6$$

2.4.1

1. Ableitung an der Stelle $x_0 = 4$ entspricht dem Anstieg der Tangente:

$$w'(x) = \frac{-1}{\sqrt{12 - 2x}} \quad m = w'(4) = \frac{-1}{\sqrt{12 - 2 \cdot 4}} = -\frac{1}{2}$$

Tangente muss berührt w im Punkt $P(4; w(4))$:

$$w(4) = \sqrt{12 - 2 \cdot 4} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + n \quad \Rightarrow \quad n = 4 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Schnittpunkt der Tangente mit der Ordinatenachse:

$$P(0; 4)$$

Schnittwinkel mit der Ordinatenachse:

$$\text{Schnittwinkel mit der Abszissenachse: } \tan \alpha = m \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 153,43^\circ$$

$$\text{Schnittwinkel mit der Ordinatenachse: } \beta = \alpha - 90^\circ = 63,43^\circ$$

2.4.2

$$A(0;0), B(u;0), C(u;w(u)), D(0;w(u)) \quad u \in \mathbb{R}, u > 0 \quad \text{Rechteck ABCD}$$

Flächeninhalt des Rechtecks:

$$F(u) = u \cdot w(u) = u \cdot \sqrt{12 - 2u}$$

Maximaler Flächeninhalt:

$$F'(u) = 1 \cdot \sqrt{12 - 2u} + u \cdot \frac{-2}{2\sqrt{12 - 2u}} = \frac{12 - 2u - u}{\sqrt{12 - 2u}} = \frac{12 - 3u}{\sqrt{12 - 2u}}$$

$$F''(u_{Max}) = \frac{-3}{\sqrt{12 - 2u_{Max}}} \quad (\text{verkürzte 2. Ableitung an der Extremstelle})$$

$$F'(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12 - 3u}{\sqrt{12 - 2u}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - 3u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 4$$

(Nenner von F' ist ungleich Null und $4 > 0$)

$$F''(4) = \frac{-3}{\sqrt{12 - 2 \cdot 4}} = -\frac{3}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Für $u = 4$ hat das Rechteck ABCD den größten Flächeninhalt.

W1 Analysis

$$f_a(x) = \ln(x^2 + a) \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

1.1

Definitionsbereich:

$$x \in \mathbb{R}, \text{ da immer } x^2 + a > 0, \text{ weil } a > 0$$

Schnittpunkt mit der Ordinatenachse:

$$f_a(0) = \ln(a) \Rightarrow P_y(0; \ln a)$$

Schnittpunkte mit der Abszissenachse:

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + a) = 0 \Leftrightarrow x^2 + a = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - a$$

$$\Rightarrow x_{0,2} = \pm\sqrt{1-a}$$

$$\Rightarrow 2 \text{ Schnittpunkte mit der Abszissenachse, wenn } 0 < a < 1: P_{x1}(\sqrt{1-a}; 0) \text{ und } P_{x2}(-\sqrt{1-a}; 0)$$

1 Schnittpunkt mit der Abszissenachse, wenn $a = 1: P_x(0; 0)$ (gleichzeitig Schnittpunkt mit Ordinatenachse)

keinen Schnittpunkt mit der Abszissenachse, wenn $a > 1$

1.2

Symmetrie:

$$f_a(-x) = \ln((-x)^2 + a) = \ln(x^2 + a) = f_a(x)$$

$\Rightarrow f$ ist eine gerade Funktion; Der Graph von f ist symmetrisch zur Ordinatenachse.

Ableitungen:

$$f_a'(x) = \frac{2x}{x^2 + a} \quad f_a''(x) = \frac{2(x^2 + a) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + a)^2} = \frac{-2x^2 + 2a}{(x^2 + a)^2} \quad f_a'''(x_w) = \frac{-4x_w}{(x_w^2 + a)^2}$$

Extrempunkte:

$$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + a} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Rightarrow x_E = 0$$

(Da $a > 0$, ist der Nenner von f' ungleich Null.)

$$f_a''(0) = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a} > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \Rightarrow P_{Min}(0; \ln a)$$

Wendepunkte:

$$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 2a}{(x^2 + a)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow x^2 = a$$

(Nenner von f'' immer größer Null)

$$\Rightarrow x_{w1} = -\sqrt{a} \quad f_a'''(-\sqrt{a}) = \frac{4\sqrt{a}}{(a+a)^2} > 0 \text{ (konkav} \rightarrow \text{konvex)} \quad f_a(-\sqrt{a}) = \ln(2a)$$

$$\Rightarrow x_{w2} = \sqrt{a} \quad f_a'''(\sqrt{a}) = \frac{-4\sqrt{a}}{(a+a)^2} < 0 \text{ (konvex} \rightarrow \text{konkav)} \quad f_a(\sqrt{a}) = \ln(2a)$$

$$\Rightarrow P_{w1}(-\sqrt{a}; \ln(2a)) \text{ (konkav} \rightarrow \text{konvex)} \quad \text{und} \quad P_{w1}(\sqrt{a}; \ln(2a)) \text{ (konvex} \rightarrow \text{konkav)}$$

1.3

$$A(\sqrt{a}; \ln(2a)), B(-\sqrt{a}; \ln(2a)), O(0;0) \quad 0 < a < \frac{1}{2}$$

Volumen des Kreiskegels:

$$V(a) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = -\frac{1}{3} \pi (\sqrt{a})^2 \ln(2a) = -\frac{1}{3} \pi a \ln(2a)$$

(Negatives Vorzeichen, da $\ln(2a) < 0$ für $0 < a < \frac{1}{2}$; Kegel liegt unterhalb der Abszissenachse.)

$$V'(a) = -\frac{1}{3} \pi \ln(2a) - \frac{1}{3} \pi a \frac{1}{a} = -\frac{1}{3} \pi (\ln(2a) + 1) \quad V''(a) = -\frac{\pi}{3a} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$V'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \pi (\ln(2a) + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2a) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad a_{\text{Max}} = \frac{1}{2e}$$

Für $a_{\text{Max}} = \frac{1}{2e}$ nimmt der Kegel das größte Volumen an.

1.4

$$h(x) = \ln 10 \quad f_5(x) = \ln(x^2 + 5) \quad x \geq 0 \quad P_y(0; \ln a) = P_y(0; \ln 5)$$

Rotationsvolumen:

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [g(y)]^2 dy \quad g(y) \dots \text{Umkehrfunktion zu } f_5(x) \quad y_1 = \ln 5 \quad y_2 = \ln 10$$

$$y = \ln(x^2 + 5) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x^2 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{e^y - 5} \quad \text{für } x \geq 0$$

$$V_y = \pi \int_{\ln 5}^{\ln 10} [\sqrt{e^y - 5}]^2 dy = \pi \int_{\ln 5}^{\ln 10} (e^y - 5) dy = \pi [e^y - 5y]_{\ln 5}^{\ln 10} = \pi (10 - 5 \ln 10 - 5 + 5 \ln 5) = \pi (5 - 5 \ln 2) = 5\pi (1 - \ln 2) \approx 4,82$$

Das Volumen beträgt rund 4,82 VE.

W2 Analysis

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5 - \frac{16}{x^2} \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \quad h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4 \quad x \in \mathbb{R}$$

2.1.1

Schnittstellen der Graphen für $x > 0$:

$$g(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}x^2 + 5 - \frac{16}{x^2} = \frac{1}{2}x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x^2 - 9 + \frac{16}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 12x^2 + \frac{64}{3} = 0$$

$$x^2 = z \quad \Rightarrow \quad z^2 - 12z + \frac{64}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - \frac{64}{3}} \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = 6 \pm \sqrt{\frac{44}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{132}}{3} = \frac{18 \pm 2\sqrt{33}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{18 - 2\sqrt{33}}{3}} \approx 1,473 \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt{\frac{18 + 2\sqrt{33}}{3}} \approx 3,135$$

(Negative Werte interessieren nicht, da $x > 0$)

Flächeninhalt:

$$F = \int_{1,473}^{3,135} g(x) - h(x) dx = \int_{1,473}^{3,135} -\frac{3}{4}x^2 + 9 - \frac{16}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{4}x^3 + 9x + \frac{16}{x} \right]_{1,473}^{3,135} \approx 2,2956$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 2,3 FE.

2.1.2

Anstieg der Tangente an G in N(-2; 0):

$$g'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{32}{x^3} \quad m_{t_g} = g'(-2) = 1 - \frac{32}{8} = -3$$

Anstieg der Normalen in N(-2; 0):

$$m_{t_g} \cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad -3 \cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad m_n = \frac{1}{3}$$

An welcher Stelle hat h den Anstieg $\frac{1}{3}$?

$$h'(x) = x \quad h'(x) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} \quad h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - 4 = -\frac{71}{18}$$

Berührungspunkt der Tangente: $H\left(\frac{1}{3}; -\frac{71}{18}\right)$

Tangentengleichung t an H, die zur Normalen parallel verläuft:

$$t: y = \frac{1}{3}x + n$$

$$H \in t: -\frac{71}{18} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + n \quad \Rightarrow \quad n = -\frac{73}{18}$$

$$\Rightarrow \quad t: y = \frac{1}{3}x - \frac{73}{18}$$

2.2

$$p_k(x) = kx^2 - 4 \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5 - \frac{16}{x^2} \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

Für $k \geq 2$ haben die Funktionen p_k und g keinen gemeinsamen Punkt:

$$\begin{aligned} p_k(x) = g(x) &\Leftrightarrow kx^2 - 4 = -\frac{1}{4}x^2 + 5 - \frac{16}{x^2} &\Leftrightarrow kx^4 - 4x^2 = -\frac{1}{4}x^4 + 5x^2 - 16 \\ &\Leftrightarrow \left(k + \frac{1}{4}\right)x^4 - 9x^2 + 16 = 0 &\Leftrightarrow \frac{4k+1}{4}x^4 - 9x^2 + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - \frac{36}{4k+1}x^2 + \frac{64}{4k+1} = 0 &\Leftrightarrow z^2 - \frac{36}{4k+1}z + \frac{64}{4k+1} = 0 \quad (z = x^2) \\ &\Rightarrow z_{1,2} = \frac{18}{4k+1} \pm \sqrt{\frac{324}{(4k+1)^2} - \frac{64}{4k+1}} &\Rightarrow z_{1,2} = \frac{18}{4k+1} \pm \sqrt{\frac{324 - 256k - 64}{(4k+1)^2}} \\ &\Rightarrow z_{1,2} = \frac{18}{4k+1} \pm \sqrt{\frac{260 - 256k}{(4k+1)^2}} \end{aligned}$$

Werte für z existieren, wenn der Term unter der Wurzel nicht kleiner Null ist.

Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist der Radikant größer Null? (Der Nenner des Radikanten ist immer größer Null.)

$$260 - 256k > 0 \quad \Rightarrow \quad 256k < 260 \quad \Rightarrow \quad k < 1\frac{1}{64}$$

\Rightarrow Für $k = 1$ gibt es zwei Schnittpunkte zwischen $p_1(x) = x^2 - 4$ und $g(x)$.

\Rightarrow Für $k \geq 2$ gibt es keinen Schnittpunkt zwischen $p_k(x) = kx^2 - 4$ und $g(x)$.

2.3

$$r(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5 \quad x \in \mathfrak{R} \quad |r(x) - g(x)| < \frac{1}{100} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5 - \frac{16}{x^2} \quad x \in \mathfrak{R}, x \neq 0$$

Für welche Werte ist der Abstand der Funktionswerte von $r(x)$ und $g(x)$ kleiner als $\frac{1}{100}$?

$$\begin{aligned} |r(x) - g(x)| < \frac{1}{100} &\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{4}x^2 + 5 + \frac{1}{4}x^2 - 5 + \frac{16}{x^2} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{16}{x^2} \right| < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow \frac{16}{x^2} < \frac{1}{100} \\ &\Leftrightarrow x^2 > 1600 \\ &\Rightarrow |x| > 40 \quad (\text{also } x > 40 \text{ oder } x < -40) \end{aligned}$$

2.4

$$f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x^2} \quad x \in \mathfrak{R}; x \neq 0; a, b, c \in \mathfrak{R}$$

Nullstelle bei $x = 2$

$$f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a + b + \frac{1}{4}c = 0 \quad \Rightarrow \quad 16a + 4b + c = 0 \quad (\text{I})$$

Tangente berührt f im Punkt $P(-4;0)$

$$f(-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 16a + b + \frac{1}{16}c = 0 \quad \Rightarrow \quad 256a + 16b + c = 0 \quad (\text{II})$$

Anstieg der Tangente muss mit 1. Ableitung von f an der Stelle $x = -4$ übereinstimmen:

Anstieg der Tangente durch $P(-4;0)$ und $S(0;6)$

$$m = \frac{y_p - y_s}{x_p - x_s} = \frac{0 - 6}{-4 - 0} = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 2ax - \frac{2c}{x^3} \quad f'(-4) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -8a + \frac{1}{32}c = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -256a + c = 48 \quad (\text{III})$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\text{(III)} \quad -256a + c = 48 \quad \Rightarrow \quad c = 256a + 48$$

$$\begin{aligned} \text{(III) in I} \quad 16a + 4b + c = 0 &\Rightarrow 16a + 4b + 256a + 48 = 0 &\Rightarrow 272a + 4b + 48 = 0 \\ &&\Rightarrow 68a + b + 12 = 0 \quad (\text{IIa}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III) in II} \quad 256a + 16b + c = 0 &\Rightarrow 256a + 16b + 256a + 48 = 0 &\Rightarrow 512a + 16b + 48 = 0 \\ &&\Rightarrow 32a + b + 3 = 0 \quad (\text{IIIa}) \end{aligned}$$

$$\text{(IIa)} - \text{(IIIa)} \quad 36a + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{a in (III)} \quad c = -256 \cdot \frac{1}{4} + 48 \quad \Rightarrow \quad c = -16$$

$$\text{a, c in (I)} \quad -16 \cdot \frac{1}{4} + 4b - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 5$$

W3 Analytische Geometrie

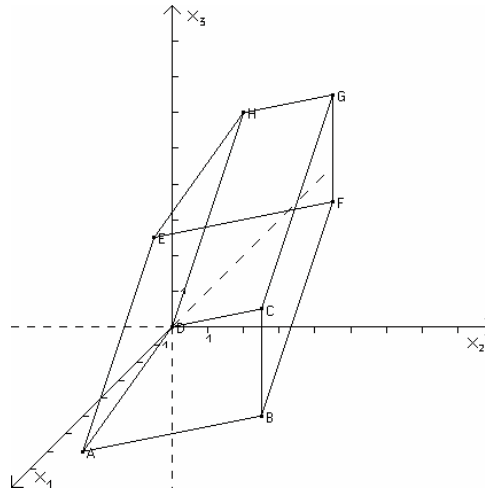
A(1; -2; -3) B(3; 4; -1) C(1; 3; 1) D(0; 0; 0) E(5; 2; 5) F(7; 8; 7) G(x; y; z) H(4; 4; 8) O(0; 0; 0)

Grundfläche ABCD

3.1

Zeichnung:

Unsichtbare Kanten: $\overline{AD}, \overline{CD}, \overline{BC}$
 $\overline{CG}, \overline{DH}$



Koordinaten von G:

$$\overline{OG} = \overline{OF} + \overline{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow G(5; 7; 9)$$

Grundfläche ABCD ist ein Trapez, wenn es zwei parallele Seiten gibt:

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overline{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 2 \cdot \overline{DC} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$\Rightarrow \text{ABCD ist ein Trapez.}$$

Flächeninhalt des Trapezes ABCD:

$$A_{\text{Trapez}} = A_{\text{ABD}} + A_{\text{ABCD}}$$

$$= \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AD}| + \frac{1}{2} |\overline{DB} \times \overline{DC}|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{360} + \frac{1}{2} \sqrt{90}$$

$$= 3\sqrt{10} + \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt{10}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes ABCD beträgt $\frac{9}{2}\sqrt{10}$ FE.

3.2

Es handelt sich um ein gerades Prisma, wenn gilt: $\overline{AB} \perp \overline{AE}$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 16 + 24 + 16 = 56 \neq 0 \Rightarrow \overline{AE} \text{ steht nicht senkrecht auf } \overline{AB}$$

\Rightarrow Es handelt sich um ein schiefes Prisma.

Ebene $\varepsilon(\text{ABEF})$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$R(3; 2; 0) \in \varepsilon(\text{ABEF})$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3 &= 1 + 2s + 4t & \Rightarrow 3 &= 1 + 3 - 8t + 4t & \Rightarrow t &= \frac{1}{4} \\ 2 &= -2 + 6s + 4t & & & \Rightarrow 2 &= -2 + 3 + 1 & \Rightarrow 2 = 2 \\ 0 &= -3 + 2s + 8t & \Rightarrow 2s &= 3 - 8t & \Rightarrow s &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

R ist ein Punkt der Ebene $\varepsilon(\text{ABEF})$, weil das Gleichungssystem mit $s = \frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{4}$ eine Lösung besitzt.

R liegt in der Seitenfläche ABFE, weil gilt: $0 < s < 1$ und $0 < t < 1$.

3.3

T(x; y; z) muss auf der Geraden g(AE) liegen:

$$g(\text{AE}): \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Seitenlängen des Dreiecks ΔBDT :

$$\left| \overline{BT} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1+4r-3 \\ -2+4r-4 \\ -3+8r+1 \end{pmatrix} \right| \quad \left| \overline{DT} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1+4r \\ -2+4r \\ -3+8r \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(1+4r)^2 + (-2+4r)^2 + (-3+8r)^2} \quad \left| \overline{BD} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{26}$$

Dreiecks ΔBDT gleichschenkelig, wenn $\overline{DT} = \overline{BD}$:

$$\begin{aligned} \left| \overline{DT} \right| &= \left| \overline{BD} \right| & \Leftrightarrow & \sqrt{(1+4r)^2 + (-2+4r)^2 + (-3+8r)^2} = \sqrt{26} \\ & & \Leftrightarrow & (1+4r)^2 + (-2+4r)^2 + (-3+8r)^2 = 26 \\ & & \Leftrightarrow & 1 + 8r + 16r^2 + 4 - 16r + 16r^2 + 9 - 48r + 64r^2 = 26 \\ & & \Leftrightarrow & 96r^2 - 56r - 12 = 0 \\ & & \Leftrightarrow & r^2 - \frac{7}{12}r - \frac{1}{8} = 0 \\ & \Rightarrow & r_{1,2} &= \frac{7}{24} \pm \sqrt{\frac{49}{576} + \frac{1}{8}} \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{7}{24} \pm \sqrt{\frac{121}{576}} \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{24} \\ & \Rightarrow & r_1 &= \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad r_2 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

r_2 interessiert nicht weiter, da T auf der Kante \overline{AE} liegen soll, also $0 < r < 1$ gelten muss.

$$\Rightarrow T(4; 1; 3)$$

Dreieck $\triangle BDT$ gleichseitig, wenn auch noch gilt: $\overline{BT} = \sqrt{26}$:

$$|\overline{BT}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{26}$$

\Rightarrow Das Dreieck $\triangle BDT$ ist gleichseitig.

Koordinatengleichung der Ebene $\varepsilon(DTB)$:

$$\overline{DT} \times \overline{DB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon(DTB): -x + y + z = d$$

$$D(0; 0; 0) \in \varepsilon(DTB) \Rightarrow d = 0$$

$$\varepsilon(DTB): -x + y + z = 0$$

3.3.2

Ebenengleichung:

Der Normalenvektor der Ebene $\varepsilon(DTB)$ muss ein Vielfaches von \overline{AE} sein, wenn der Schnittwinkel 90° betragen soll:

$$\overline{AE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow n = r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathfrak{R} \Rightarrow \varepsilon(DTB): 4rx + 4ry + 8rz = d$$

$$D(0; 0; 0) \in \varepsilon(DTB) \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \varepsilon(DTB): 4rx + 4ry + 8rz = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon(DTB): x + y + 2z = 0$$

Liegt $B(3; 4; -1)$ wie gefordert in der Ebene $\varepsilon(DTB)$?

$$3 + 4 - 2 = 5 \neq 0$$

\Rightarrow Es gibt keine solche Ebene, die die Kante \overline{AE} senkrecht schneidet.

W3 Stochastik

X...Anzahl der fehlerhaften Pfeile

Y...Anzahl der Pfeile, die in Ordnung sind

$p = P(\text{fehlerhaft}) = 0,05$

4.1

$n = 100$

Bernoullikette liegt vor, wenn

sich die Erfolgswahrscheinlichkeit nicht ändert, die einzelnen Ziehungen also voneinander unabhängig sind.

Dies kann man realisieren, indem man die geprüften Pfeile (auch die fehlerhaften) wieder zurücklegt. Anderenfalls muss die Grundgesamtheit gegenüber der Stichprobe sehr groß sein, so dass sich die Erfolgswahrscheinlichkeit nicht ändert.

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = P(X = 6) = B_{100;0,05}(6) = \binom{100}{6} \cdot (0,05)^6 \cdot (0,95)^{94} \approx 15\%$$

$$\text{oder: } P(A) = P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = F_{100;0,05}(6) - F_{100;0,05}(5) = 0,7660 - 0,6160 = 15\%$$

$$P(B) = P(Y < 92) = P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - F_{100;0,05}(8) = 1 - 0,9369 \approx 6,31\%$$

$$P(C) = P(90 \leq Y \leq 98) = P(2 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 1) \\ = F_{100;0,05}(10) - F_{100;0,05}(1) = 0,9885 - 0,0371 \approx 95,14\%$$

4.2

Rechtsseitiger Signifikanztest

$$H_0: p \geq 0,05 \quad H_1: p > 0,05$$

X...Anzahl der defekten Teile

 H_0 wahr \Rightarrow X ist $B_{100; 0,05}$ - verteilt (binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,05$)

$$\text{Ablehnungsbereich: } \bar{A} = \{8; 9; \dots; 100\}$$

Gesucht ist:

$$P(H_0 \text{ abgelehnt, obwohl } H_0 \text{ in der Realität wahr ist}) = P(\text{Fehler 1. Art}) = \alpha = \text{Signifikanzniveau}$$

$$\alpha = P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F_{100; 0,05}(7) = 1 - 0,8720 \approx 12,8\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung fälschlicherweise zurückgeschickt wird, beträgt 12,8%

Änderung der Entscheidungsregel:

$$\bar{A} = \{k_r; k_r + 1; \dots; 100\}$$

 $\Rightarrow H_0$ wird auf Grund der Stichprobe nicht abgelehnt, wenn die Stichprobe einen Wert kleiner k_r liefert.

$$\Rightarrow \text{„Annahmehbereich“: } A = \{1; 2; \dots; k_r - 1\}$$

Gesucht ist:

$$P(\text{keine Entscheidung für } H_1, \text{ obwohl } H_1 \text{ in der Realität wahr}) = P(\text{Fehler 2. Art}) = \beta$$

$$\beta = P(X \leq k_r - 1) \approx F_{100; 0,05}(k_r - 1) < 0,12$$

$$F_{100; 0,05}(2) \approx 0,1183 \quad F_{100; 0,05}(3) \approx 0,2578$$

$$\Rightarrow k_r - 1 = 2 \quad \Rightarrow k_r = 3$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \{3; 4; \dots; 100\}$$

Entscheidungsregel:

Die Sendung wird zurückgeschickt, wenn mindestens 3 Pfeile defekt sind; wenn weniger als 3 Pfeile defekt sind, wird die Sendung angenommen.

ACHTUNG:

Die 2. Teilaufgabe ist eigentlich nicht lösbar. Der Ablehnungsbereich kann nur berechnet werden, wenn die wirkliche Wahrscheinlichkeit für defekte Pfeile bekannt ist, also die Alternativhypothese klar definiert ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art kann man in der Binomialverteilung ablesen, die die Alternativhypothese beschreibt. Die Zufallsgröße X ist hier, wenn die Alternativhypothese stimmt, nicht mehr $B_{100; 0,05}$ - verteilt. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist größer als 0,05 und leider nicht bekannt.

Es handelt sich bei der Berechnung nur um eine Abschätzung unter der Bedingung, dass die wirkliche Erfolgswahrscheinlichkeit nur geringfügig über 0,05 liegt.

4.3

5 Felder mit den Punkten 1 bis 5

4.3.1

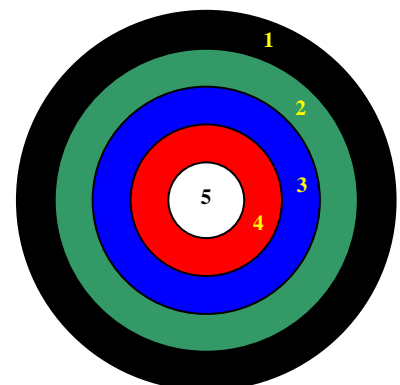
Anzahl der Möglichkeiten:

Es gibt $5! = 120$ verschiedene Farbanordnungen.

Begründung:

Es gibt 5 verschiedene Möglichkeiten, dem 1. Ring eine Farbe zuzuordnen, diese kann dann nicht mehr vergeben werden, weil alle Ringe unterschiedlich gefärbt sein sollen. Daher gibt es nur noch 4 Möglichkeiten, für den 2. Ring, dann 3 Möglichkeiten für den 3. Ring, usw.

Es müssen 5 Objekte (Farben) auf 5 Positionen (Ringe) angeordnet werden, wobei Wiederholungen ausgeschlossen sind. Es handelt sich demnach um eine Permutation ohne Wiederholung. Bei n Objekten gibt es demnach $n!$ mögliche Anordnungen.



4.3.2

Y...Anzahl der erreichten Punkte bei einmaligem Schießen

Scheibe wird immer getroffen \Rightarrow Y kann die Werte 1, 2, 3, 4, 5 annehmen.

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(Y=5) = \frac{A_5}{A_{ges}} = \frac{\pi \cdot r_5^2}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{(6cm)^2}{(30cm)^2} = \frac{36}{900} = \frac{1}{25}$$

$$P(Y=4) = \frac{A_4}{A_{ges}} = \frac{\pi \cdot (r_4^2 - r_5^2)}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{(12cm)^2 - (6cm)^2}{(30cm)^2} = \frac{108}{900} = \frac{3}{25}$$

$$P(Y=3) = \frac{A_3}{A_{ges}} = \frac{\pi \cdot (r_3^2 - r_4^2)}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{(18cm)^2 - (12cm)^2}{(30cm)^2} = \frac{180}{900} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$P(Y=2) = \frac{A_2}{A_{ges}} = \frac{\pi \cdot (r_2^2 - r_3^2)}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{(24cm)^2 - (18cm)^2}{(30cm)^2} = \frac{252}{900} = \frac{7}{25}$$

$$P(Y=1) = \frac{A_1}{A_{ges}} = \frac{\pi \cdot (r_1^2 - r_2^2)}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{(30cm)^2 - (24cm)^2}{(30cm)^2} = \frac{324}{900} = \frac{9}{25}$$

4.3.3

Erwartungswert:

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{9}{25} + 2 \cdot \frac{7}{25} + 3 \cdot \frac{5}{25} + 4 \cdot \frac{3}{25} + 5 \cdot \frac{1}{25} = \frac{11}{5} = 2 \frac{1}{5} = 2,2$$

Varianz:

$$Var(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 \cdot \frac{9}{25} + 4 \cdot \frac{7}{25} + 9 \cdot \frac{5}{25} + 16 \cdot \frac{3}{25} + 25 \cdot \frac{1}{25} - \frac{121}{25} = \frac{34}{25} = 1 \frac{9}{25} = 1,36$$

Standardabweichung:

$$\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\frac{34}{25}} = \frac{\sqrt{34}}{5} \approx 1,166$$

Aussagen:

Beide Aussagen sind falsch, denn ein Erwartungswert einer Zufallsgröße, die nur ganzzahlige Werte annimmt, kann nicht-ganzzahlig sein. Da es sich bei beiden Aussagen um All-Aussagen handelt, reicht ein Gegenbeispiel, um die Aussagen zu widerlegen. Das Gegenbeispiel ist in 4.3.3 zu finden: Die Zufallsgröße Y kann nur ganzzahlige Werte annehmen, jedoch ist der Erwartungswert nicht ganzzahlig.

(Es würde reichen, auf dieses Gegenbeispiel $2,2 \notin \{1;2;3;4;5\}$ zu verweisen.)