

P1 Analytische Geometrie**1.1**

Darstellung der Vektoren:

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BH}$$

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AF}$$

1.2

$$\begin{array}{llll} A(0;0;0) & B(1;4;0) & C(-1;10;0) & D(-2;6;0) \\ E(0;0;5) & F(1;4;5) & G(-1;10;5) & H(-2;6;5) \end{array}$$

1.2.1Koordinatengleichung von ε_{BDHF} :

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{BDHF}: 2x + 3y = d$$

$$B \in \varepsilon_{BDHF} \Rightarrow d = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 14 \Rightarrow \varepsilon_{BDHF}: 2x + 3y = 14$$

Berechnung des Schnittwinkels:

$$\text{Richtungsvektor von } g_{CE}: \vec{u} = \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-28|}{3\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} = \frac{28}{3\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} \approx 0,6918 \Rightarrow \alpha = 43,78^\circ$$

1.2.2

Die Eckpunkte A und E liegen in der y-z-Ebene; Es wird ein dritter Schnittpunkt der y-z-Ebene mit dem Körper berechnet.

Schnittpunkt von y-Achse mit g_{BC} :

$$g_{BC}: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{Schnittpunkt mit y-Achse} \Rightarrow x_S = z_S = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_S \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow y_S = 7 \Rightarrow S(0;7;0)$$

Flächeninhalt der Schnittfläche:

$$A = |\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AE}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 35 \text{ (FE)}$$

P2 Analysis**2.1**

$$k_t(x) = -tx^3 + 12tx \quad x, t \in \mathfrak{R}, t > 0$$

Ableitungen:

$$k_t'(x) = -3tx^2 + 12t \quad k_t''(x) = -6tx$$

2.1.1Berechnung von x_t :

$$\begin{aligned} k_t'(x) = 9t &\Leftrightarrow -3tx^2 + 12t = 9t &\Leftrightarrow -3tx^2 = -3t &\Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x_{t1} = -1 \text{ entfällt, da } x_t > 0 \text{ gefordert} && \text{und } x_{t2} = 1 \end{aligned}$$

2.1.2

Berechnung des Extrempunktes:

$$\begin{aligned} \text{Extrempunkt im 1. Quadranten} &\Rightarrow x_E \geq 0 \text{ und } k_t(x_E) \geq 0 \\ k_t'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3tx^2 + 12t = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 4 &\Rightarrow x_{E1} = -2 \text{ entfällt} && \text{und } x_{E2} = 2 \\ k_t''(x_{E2}) = -6t \cdot 2 = -12t < 0, \text{ da } t > 0 &\Rightarrow x_{E2} \text{ ist Maximumstelle} \\ k_t(x_{E2}) = -t \cdot 2^3 + 12t \cdot 2 = 16t &\Rightarrow \text{Maximum: } E_t(2; 16t) \end{aligned}$$

Anstieg der Geraden:

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16t - 0}{2 - 0} = 8t$$

2.1.3Berechnung der Nullstellen von k_t :

$$\begin{aligned} k_t(x) = 0 &\Leftrightarrow -tx^3 + 12tx = 0 &\Leftrightarrow tx(-x^2 + 12) = 0 \\ &\Rightarrow x_{01} = 0 \text{ und } x_{02} = 2\sqrt{3} \text{ und } x_{03} = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Berechnung von t :Fläche im 1. Quadranten \Rightarrow Bestimmtes Integral muss von x_{01} bis x_{02} berechnet werden

$$\begin{aligned} A = \int_{x_{01}}^{x_{02}} k_t(x) dx &\Rightarrow \int_0^{2\sqrt{3}} (-tx^3 + 12tx) dx = 72 &\Rightarrow \left[-\frac{1}{4}tx^4 + 6tx^2 \right]_0^{2\sqrt{3}} = 72 \\ &\Rightarrow -36t + 72t = 72 &\Rightarrow 36t = 72 &\Rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

2.2

$$f_{a,b}(x) = ax^3 + bx \quad x, a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

2.2.1Begründung, dass $a > 0$ und $b < 0$ gilt:

$$\text{Für } x \rightarrow \infty \text{ strebt die dargestellte Funktion gegen } \infty \quad \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f_{a,b}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^3 + bx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^3) \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow a > 0, \text{ weil } x^3 \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ gegen } \infty \text{ strebt}$$

$$\text{Nullstellen: } f_{a,b}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^3 + bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(ax^2 + b) = 0$$

$$\Rightarrow x_{01} = 0 \text{ und } x_{02} = \sqrt{\frac{-b}{a}} \text{ und } x_{03} = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$$

$$\Rightarrow a \text{ und } b \text{ müssen unterschiedliche Vorzeichen haben, da drei Nullstellen in der Abbildung vorhanden sind und sonst die Wurzel nicht definiert wäre}$$

$$\Rightarrow b < 0$$

2.2.2

Gleichung für $g_{a,b}$:

$f_{a,b}$ ist die 1. Ableitungsfunktion von $g_{a,b} \Rightarrow g_{a,b}$ ist eine Stammfunktion von $f_{a,b}$
 $\Rightarrow \int f_{a,b}(x)dx = \int (ax^3 + bx)dx = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{2}x^2 + c \quad c \in \mathfrak{R} \Rightarrow g_{a,b}(x) = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{2}x^2$

2.2.3

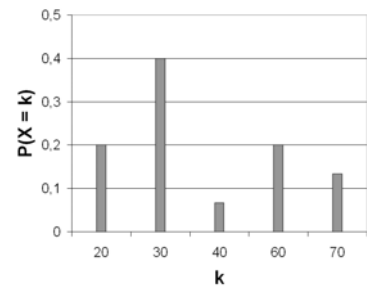
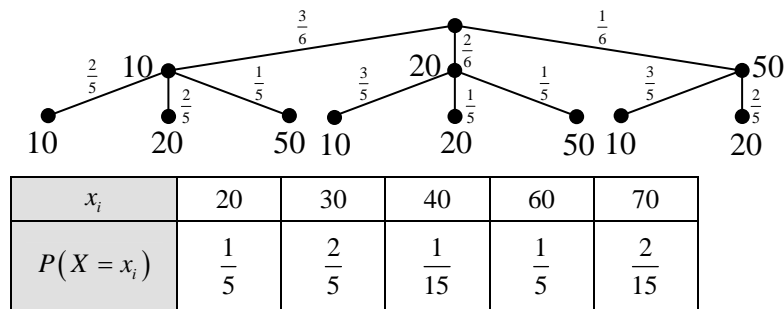
Untersuchung des Krümmungsverhaltens:

$f_{a,b}$ ist die Stammfunktion von $h_{a,b} \Rightarrow h_{a,b}$ ist die 1. Ableitungsfunktion von $f_{a,b}$
 $h_{a,b}(x) = f_{a,b}'(x) = 3ax^2 + b \quad x, a, b \in \mathfrak{R}, a > 0, b < 0$
 Der Graph von $h_{a,b}$ ist eine nach oben offene Parabel. $\Rightarrow h_{a,b}$ ist konvex für $x \in \mathfrak{R}$
 Alternative: $h_{a,b}'(x) = 6ax \quad h_{a,b}''(x) = 6a > 0 \Rightarrow h_{a,b}$ ist konvex für $x \in \mathfrak{R}$

P3 Stochastik

3.1.1

Baumdiagramm und Wahrscheinlichkeitsverteilung:



3.1.2

Berechnung des Mindesteinsatzes:

$E(X) = 20 \cdot \frac{1}{5} + 30 \cdot \frac{2}{5} + 40 \cdot \frac{1}{15} + 60 \cdot \frac{1}{5} + 70 \cdot \frac{2}{15} = 40$ (Cent)

Der Mindesteinsatz pro Spiel muss 40 Cent betragen, damit der Betreiber auf lange Sicht keinen Verlust erzielt.

3.2

Y...Anzahl der gezogenen 50-Cent-Kugel Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$

3.2.1

Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,775$

3.2.2

Berechnung der Anzahl der Ziehungen:

$P(Y \geq 1) \geq 0,95 \Rightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0,95 \Rightarrow P(Y = 0) \leq 0,05 \Rightarrow \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,05$
 $\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,05 \Rightarrow n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,05) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 16,43 \Rightarrow n \geq 17$

W1 Analysis

$$f_k(x) = \sqrt{25 - (x - k)^2} \quad x, k \in \mathbb{R}, -5 + k \leq x \leq 5 + k$$

1.1

Berechnung der Tangente:

$$f_7(x) = \sqrt{25 - (x - 7)^2} \quad x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 12$$

$$f_7'(x) = \frac{-2(x - 7)}{2\sqrt{25 - (x - 7)^2}} = \frac{7 - x}{\sqrt{25 - (x - 7)^2}}$$

$$T(11; 3) \in t_7 \Rightarrow 3 = -\frac{4}{3} \cdot 11 + n \Rightarrow n = \frac{53}{3} \Rightarrow t_7: y = -\frac{4}{3}x + \frac{53}{3}$$

$$f_7(11) = \sqrt{25 - (11 - 7)^2} = 3$$

$$m = f_7'(11) = \frac{7 - 11}{\sqrt{25 - (11 - 7)^2}} = -\frac{4}{3}$$

Nullstelle von t_7 :

$$-\frac{4}{3}x + \frac{53}{3} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{53}{4}$$

Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \frac{53}{4} \cdot \frac{53}{3} = \frac{2809}{24} \text{ (FE)}$$

1.2

Schnittstelle von G_0 und G_7 :

$$f_0(x) = f_7(x) \Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - (x - 7)^2} \Rightarrow 25 - x^2 = 25 - (x - 7)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = (x - 7)^2 \Rightarrow x^2 = x^2 - 14x + 49 \Rightarrow 14x = 49 \Rightarrow x_s = \frac{7}{2}$$

Berechnung des Volumens:

Die Fläche, die von dem Graphen G_0 , der x-Achse und der Geraden $x = x_s$ eingeschlossen wird, entspricht der Fläche, die von dem Graphen G_7 , der x-Achse und der Geraden $x = x_s$ eingeschlossen wird, da die Schnittstelle x_s genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen 2 und 5 der Graphen liegt, die von den Graphen beschriebenen Halbkreise denselben Radius $r = 5$ besitzen und die Mittelpunkte der Halbkreise auf der x-Achse liegen.

$$V = 2\pi \int_{\frac{7}{2}}^5 [f_0(x)]^2 dx = 2\pi \int_{\frac{7}{2}}^5 [\sqrt{25 - x^2}]^2 dx = 2\pi \int_{\frac{7}{2}}^5 (25 - x^2) dx = 2\pi \left[25x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{7}{2}}^5$$

$$V = 2\pi \left(125 - \frac{125}{3} - \frac{175}{2} + \frac{343}{24} \right) = \frac{81}{4}\pi \text{ (VE)}$$

1.3

Eckpunkte des Dreiecks:

$$O(0; 0) \quad P(u; \sqrt{25 - u^2}) \quad Q(-u; \sqrt{25 - u^2})$$

\Rightarrow gleichschenkliges Dreieck mit der Grundseite $2u$ und der Höhe $\sqrt{25 - u^2}$ auf die Grundseite

Berechnung des maximalen Flächeninhalts:

$$A(u) = u \cdot \sqrt{25 - u^2} \Rightarrow A'(u) = 1 \cdot \sqrt{25 - u^2} + u \cdot \frac{-u}{\sqrt{25 - u^2}} = \frac{25 - u^2 - u^2}{\sqrt{25 - u^2}} = \frac{25 - 2u^2}{\sqrt{25 - u^2}}$$

$$A''(u_{Max}) = \frac{-4u_{Max}}{\sqrt{25 - u_{Max}^2}} < 0 \text{ für } u > 0$$

$$A'(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{25 - 2u^2}{\sqrt{25 - u^2}} = 0 \Rightarrow 25 - 2u^2 = 0 \Rightarrow u_{Max} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ (LE)}$$

Nenner von $A'(u)$ für $u_{Max} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ ist größer Null; $u_2 = -\frac{5}{2}\sqrt{2} < 0$ entfällt, da kleiner Null

1.4

Berechnung von k:

$$\begin{aligned}
 f_k(x) = g(x) &\Rightarrow \sqrt{25 - (x-k)^2} = x+9 &\Rightarrow 25 - (x-k)^2 = (x+9)^2 \\
 &\Rightarrow 25 - x^2 + 2kx - k^2 = x^2 + 18x + 81 &\Rightarrow 2x^2 + (18-2k)x + (56+k^2) = 0 \\
 &\Rightarrow x^2 + (9-k)x + \left(28 + \frac{1}{2}k^2\right) = 0 \\
 &\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{9-k}{2} \pm \sqrt{\frac{(9-k)^2}{4} - 28 - \frac{1}{2}k^2} \\
 f_k \text{ berührt } g &\Rightarrow \text{Es gibt genau eine Lösung} &\Rightarrow \frac{(9-k)^2}{4} - 28 - \frac{1}{2}k^2 = 0 \\
 &\Rightarrow (9-k)^2 - 112 - 2k^2 = 0 &\Rightarrow 81 - 18k + k^2 - 112 - 2k^2 = 0 \\
 &\Rightarrow k^2 + 18k + 31 = 0 &\Rightarrow k_{1,2} = -9 \pm \sqrt{81-31} \\
 &\Rightarrow k_1 = -9 + 5\sqrt{2} \approx -1,93 \text{ und } k_2 = -9 - 5\sqrt{2} \approx -16,07 \leq -9 \text{ entfällt}
 \end{aligned}$$

Alternative:

$$\begin{aligned}
 f_k'(x) = \frac{-(x-k)}{\sqrt{25-(x-k)^2}} & \quad f_k'(x_B) = 1 &\Rightarrow \frac{-(x-k)}{\sqrt{25-(x-k)^2}} = 1 \\
 \Rightarrow -(x-k) = \sqrt{25-(x-k)^2} & \Rightarrow (x-k)^2 = 25-(x-k)^2 &\Rightarrow (x-k)^2 = \frac{25}{2} \\
 \Rightarrow x^2 - 2kx + k^2 - \frac{25}{2} = 0 & \Rightarrow x_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 - k^2 + \frac{25}{2}} &\Rightarrow x_{1,2} = k \pm \frac{5}{2}\sqrt{2} \\
 f_k\left(k + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = g\left(k + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) & \Rightarrow \sqrt{25 - \left(k + \frac{5}{2}\sqrt{2} - k\right)^2} = k + \frac{5}{2}\sqrt{2} + 9 \\
 & \Rightarrow \frac{5}{2}\sqrt{2} = k + \frac{5}{2}\sqrt{2} + 9 &\Rightarrow k = -9 \text{ entfällt} \\
 f_k\left(k - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = g\left(k - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) & \Rightarrow \sqrt{25 - \left(k - \frac{5}{2}\sqrt{2} - k\right)^2} = k - \frac{5}{2}\sqrt{2} + 9 \\
 & \Rightarrow \frac{5}{2}\sqrt{2} = k - \frac{5}{2}\sqrt{2} + 9 &\Rightarrow k = -9 + 5\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

W2 Analytische Geometrie

$$\begin{array}{llll}
 A(16;0;0) & B(16;10;0) & C(0;10;0) & D(0;0;0) \\
 E(16;0;3) & F(16;10;3) & G(0;10;3) & H(0;0;3) \\
 I\left(14;5;\frac{9}{2}\right) & J\left(2;5;\frac{9}{2}\right) & &
 \end{array}$$

2.1

Koordinatengleichung der Dachebene ε_1 :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EI} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_1: 3x + 4z = d \\
 E \in \varepsilon_1 &\Rightarrow d = 3 \cdot 16 + 4 \cdot 3 = 60 \Rightarrow \varepsilon_1: 3x + 4z = 60
 \end{aligned}$$

Koordinatengleichung der Dachebene ε_2 :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{FG} \times \overrightarrow{FI} &= \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 80 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{\varepsilon_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_2: 3y + 10z = d \\
 F \in \varepsilon_2 &\Rightarrow d = 3 \cdot 10 + 10 \cdot 3 = 60 \Rightarrow \varepsilon_2: 3y + 10z = 60
 \end{aligned}$$

Berechnung des Winkels:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{|\vec{n}_{\varepsilon_1} \cdot \vec{n}_{\varepsilon_2}|}{|\vec{n}_{\varepsilon_1}| \cdot |\vec{n}_{\varepsilon_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right|} = \frac{40}{5 \cdot \sqrt{109}} = \frac{8}{\sqrt{109}} \Rightarrow \alpha \approx 39,9^\circ \Rightarrow \\
 & \beta = 180^\circ - \alpha \\
 & = 180^\circ - 40^\circ \\
 & = 140^\circ
 \end{aligned}$$

2.2

$$P(4;6;0) \quad R\left(\frac{7}{2}; \frac{13}{2}; 0\right)$$

2.2.1

Berechnung der Höhe:

$$\begin{aligned}
 U \text{ hat die x-Koordinate von P und die y-Koordinate von R} &\Rightarrow U\left(4; \frac{13}{2}; z_u\right) \\
 \text{Der Durchstoßungspunkt Z hat die x- und y-Kordinaten von U} &\Rightarrow Z\left(4; \frac{13}{2}; h\right) \\
 Z \in \varepsilon_2 &\Rightarrow 3 \cdot \frac{13}{2} + 10 \cdot h = 60 \Rightarrow h = \frac{81}{20} = 4,05 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

2.2.2

Prüfung der Sichtbarkeit:

T hat die dieselben x- und y-Koordinaten wie P und die z-Koordinate 6: $T(4;6;6)$

Die Gerade g_{MT} darf die Dachebene ε_1 nicht schneiden:

$$g_{MT}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -16 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

$$g_{MT} = \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad 3(20-16r) + 4(1+5r) = 60 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad S_{\varepsilon_1} \left(17\frac{5}{7}; -7\frac{5}{7}; 1\frac{5}{7} \right)$$

Die y-Koordinate ist kleiner als die von E \Rightarrow Schnittpunkt liegt nicht innerhalb der Dachebene.
 \Rightarrow Sichtbarkeit nicht gestört

2.2.3

Berechnung der maximalen Höhe:

Der Schatten fällt genau in die x-z-Richtung. Der Schatten kann also nur über die Dachkante \overline{FI} hinausgehen. Zu berechnen ist also, bei welcher Höhe die Gerade durch $T(4;6;h)$ mit dem Richtungsvektor \vec{u} die Kante \overline{FI} schneidet. Außerdem muss untersucht werden, bei welcher Höhe die Gerade durch $U\left(4;\frac{13}{2};h\right)$ mit dem

Richtungsvektor \vec{u} die Kante \overline{FI} schneidet.

$$g_{Tu}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ h \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 53 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix} \quad g_{Uu}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{13}{2} \\ h \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 53 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} g_{FI}: & 3x + 4z = 60 \\ & 3y + 10z = 60 \end{matrix}$$

$$g_{Tu} = g_{FI} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 3(4+53s) + 4(h-11s) = 60 & \Rightarrow & 115s + 4h = 48 \\ 3(6+0s) + 10(h-11s) = 60 & \Rightarrow & -110s + 10h = 42 \end{matrix}$$

$$-110s + 10h = 42 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{5h-21}{55}$$

$$115 \left(\frac{5h-21}{55} \right) + 4h = 48 \quad \Rightarrow \quad 575h - 2415 + 220h = 2640 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{337}{53} \approx 6,358 \text{ (m)}$$

$$g_{Uu} = g_{FI} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 3(4+53t) + 4(h-11t) = 60 & \Rightarrow & 115t + 4h = 48 \\ 3\left(\frac{13}{2}+0t\right) + 10(h-11t) = 60 & \Rightarrow & -220t + 20h = 81 \end{matrix}$$

$$-220t + 20h = 81 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{20h-81}{220}$$

$$115 \left(\frac{20h-81}{220} \right) + 4h = 48 \quad \Rightarrow \quad 2300h - 9315 + 880h = 10560 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ (m)}$$

\Rightarrow Die Höhe h darf maximal 6,25 m betragen.

W3 Analytische Geometrie und Analysis

$$P_1(14;13) \quad P_2(12;11) \quad Q_1(12;-2) \quad Q_2(11;-1)$$

3.1.1Gerade $g(P_1; P_2)$:

$$m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-13}{12-14} = 1 \quad P_1 \in g(P_1; P_2) \Rightarrow 13 = 1 \cdot 14 + n \Rightarrow n = -1 \Rightarrow g(P_1; P_2): y = x - 1$$

Berechnung von R:

$$\begin{aligned} \text{Kreis um } L(0;1) \text{ mit } r = 10: \quad k: x^2 + (y-1)^2 &= 10^2 & \text{mit } x, y \in \mathfrak{R}, x > 0, y > 0 \\ K = g(P_1; P_2) \Rightarrow x^2 + (x-1-1)^2 &= 10^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 10^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \\ &\Rightarrow x_{R_{1,2}} = 1 \pm \sqrt{1+48} = 1 \pm 7 \Rightarrow x_R = 8 \quad (x_R = -6 < 0 \text{ entfällt}) \\ y_R = x_R - 1 = 8 - 1 = 7 &\Rightarrow R(8;7) \end{aligned}$$

Berechnung des Winkels:

$$\begin{aligned} m_{RL} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{8-0} = \frac{3}{4} \\ \tan \alpha_g &= m_g = 1 \Rightarrow \alpha_g = 45^\circ \quad \tan \alpha_{RL} = m_{RL} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha_{RL} \approx 36,87^\circ \quad \beta = \alpha_g - \alpha_{RL} \approx 45^\circ - 36,87^\circ = 8,13^\circ \end{aligned}$$

3.1.2Gerade n senkrecht zu g durch L :

$$m_n = \frac{-1}{m_g} = \frac{-1}{1} = -1 \quad L \in n \Rightarrow n: y = -x + 1$$

Berechnung des Abstandes:

$$\begin{aligned} n = g \Rightarrow x - 1 = -x + 1 &\Rightarrow x_F = 1 \Rightarrow y_F = -1 + 1 = 0 \Rightarrow F(1;0) \\ d = \overline{FL} &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ (sm)} \end{aligned}$$

3.2

$$P_r(14-2r; 13-2r) \quad Q_r(12-r; -2+r) \quad r \in \mathfrak{R}, r > 0 \quad d = \overline{P_r Q_r}$$

3.2.1

Berechnung des Ortes:

$$\begin{aligned} d = \overline{P_r Q_r} = 9 &\Rightarrow \sqrt{(-2+r)^2 + (-15+3r)^2} = 9 \Rightarrow (-2+r)^2 + (-15+3r)^2 = 81 \\ &\Rightarrow 4 - 4r + r^2 + 225 - 90r + 9r^2 = 81 \Rightarrow 10r^2 - 94r + 148 = 0 \\ &\Rightarrow r^2 - \frac{47}{5}r + \frac{74}{5} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{47}{10} \pm \sqrt{\frac{2209}{100} - \frac{1480}{100}} \\ &\Rightarrow r_{1,2} = \frac{47}{10} \pm \sqrt{\frac{729}{100}} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{47}{10} \pm \frac{27}{10} \\ &\Rightarrow r_1 = \frac{74}{10} = 7,4 \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{20}{10} = 2 \\ &\Rightarrow P_1(-0,8; -1,8) \quad \text{und} \quad P_2(10;9) \end{aligned}$$

P_2 ist der gesuchte Ort, da für die x -Koordinate von P_2 größer als die von P_1 ist und die Schiffe eine Richtung haben, bei der sich die x -Koordinaten verringern.

3.2.2

Berechnung des minimalen Abstandes:

$$d(r) = \sqrt{(-2+r)^2 + (-15+3r)^2}$$

Der Abstand wird minimal, wenn der Quadrat des Abstandes minimal wird, weil die Wurzelfunktion eine monoton wachsende Funktion ist.

$$d^2(r) = (-2+r)^2 + (-15+3r)^2$$

$$d^{2\prime}(r) = 2(-2+r) + 6(-15+3r) = 20r - 94 \quad d^{2\prime\prime}(r) = 20 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$d^{2\prime}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad 20r - 94 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\text{Min}} = \frac{47}{10} = 4,7$$

$$d\left(\frac{47}{10}\right) = \sqrt{(-2+r)^2 + (-15+3r)^2} = \sqrt{\frac{81}{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \approx 2,846 \text{ (sm)}$$

3.3

$$f(x) = -x^3 + x + 4 \quad g(x) = x + 1 \quad x \in \mathfrak{R}, 0 \leq x \leq x_B$$

Berechnung von x_B :

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad -x^3 + x + 4 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_B = \sqrt[3]{3}$$

Berechnung des Flächeninhalts:

$$A = \int_0^{x_B} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + x + 4 - x - 1) dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + 3) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 3x \right]_0^{\sqrt[3]{3}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = \frac{9}{4}\sqrt[3]{3} \approx 3,245 \text{ (sm}^2\text{)}$$