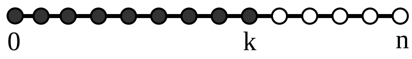
Rechenregeln für die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

Definition der Verteilungsfunktion

Die Funktion F mit $F(x) = P(X \le x)$, x $\in$ R, die jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \le x)$ zuordnet, heißt Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X.

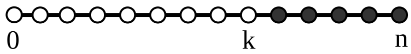
X sei eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p.
k (bzw. k_1 und k_2) nehme die Werte der Zufallsgröße 0, 1, ..., n an.
$F_{n;p}$ sei die zugehörige Verteilungsfunktion[1].

1. $$P(X \le k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + ... + P(X=k)$$
$$= F_{n;p}(k)$$



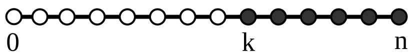
Die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k oder genau k (also weniger als k+1) Erfolge auftreten, wird gerade durch die Verteilungsfunktion aufsummiert.

2. $$P(X > k) = P(X=k+1) + P(X=k+2) + ... + P(X=n)$$
$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + ... + P(X=k)\right]$$
$$= 1 - P(X \le k)$$
$$= 1 - F_{n;p}(k)$$



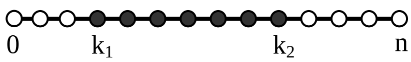
Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als k Erfolge auftreten, ist die Gegenwahrscheinlichkeit dazu, dass weniger als k oder genau k Erfolge auftreten (diese nach 1. berechen).

3. $$P(X \ge k) = P(X=k) + P(X=k+1) + ... + P(X=n)$$
$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + ... + P(X=k-1)\right]$$
$$= 1 - P(X \le k-1)$$
$$= 1 - F_{n;p}(k-1)$$



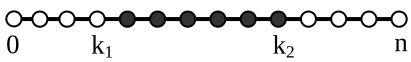
Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als k oder genau k Erfolge auftreten, ist die Gegenwahrscheinlichkeit dazu, dass weniger als k-1 oder genau k-1 Erfolge auftreten (diese nach 1. berechen).

4. $$P(k_1 \le X \le k_2) = P(X \le k_2) - \left[P(X=0) + P(X=1) ... + P(X=k_1-1)\right]$$
$$= P(X \le k_2) - P(X \le k_1 - 1)$$
$$= F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1 - 1)$$



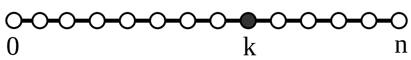
Die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k_2 oder gleich k_2, aber mehr als k_1 oder gleich k_1 Erfolge auftreten, lässt sich berechnen, indem man erst die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k_2 oder gleich k_2 Erfolge auftreten, bestimmt und davon die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k_1 Erfolge auftreten, abzieht. (die Einzelwahrscheinlichkeiten nach 1. berechnen)

5. $$P(k_1 < X \le k_2) = P(X \le k_2) - \left[P(X=0) + P(X=1) ... + P(X=k_1)\right]$$
$$= P(X \le k_2) - P(X \le k_1)$$
$$= F_{n;p}(k_2) - F_{n;p}(k_1)$$



Die Wahrscheinlichkeit hier sieht genauso aus, wie unter 4., jedoch dürfen diesmal nicht genau k_1 Erfolge auftreten. Deshalb muss man k_1-1 jetzt durch k_1 ersetzen.

6. $$P(X=k) = P(X=0) + P(X=1) + ... + P(X=k) - \left[P(X=0) + P(X=1) + ... + P(X=k-1)\right]$$
$$= P(X \le k) - P(X \le k-1)$$
$$= F_{n;p}(k) - F_{n;p}(k-1)$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Erfolge auftreten, lässt sich berechnen, indem man erst die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k oder gleich k Erfolge auftreten, bestimmt und davon die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als k-1 oder gleich k-1 Erfolge auftreten, abzieht.

---

[1] Bedeutung der Werte für die zugehörige Bernoullikette:
- n...Länge der Bernoullikette (n gleichartige Bernoulliversuche werden durchgeführt)
- k...Anzahl der Erfolge
- p...Erfolgswahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit für den Erfolg bei einem Bernoulliversuch)