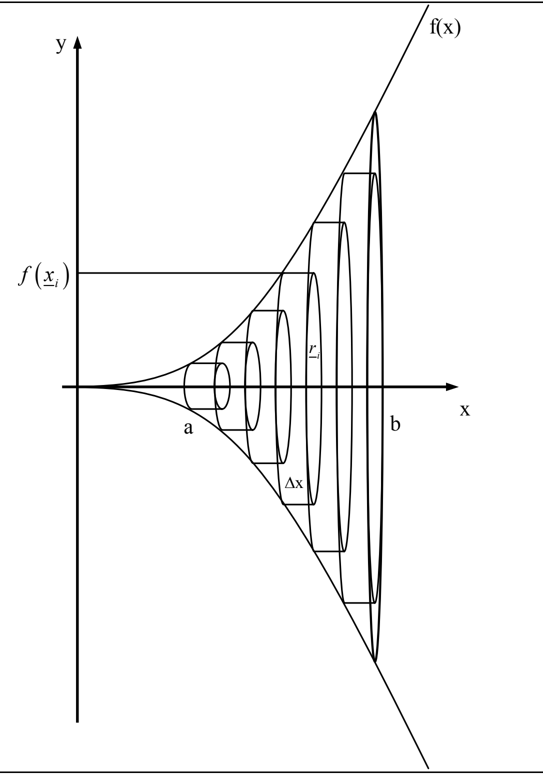
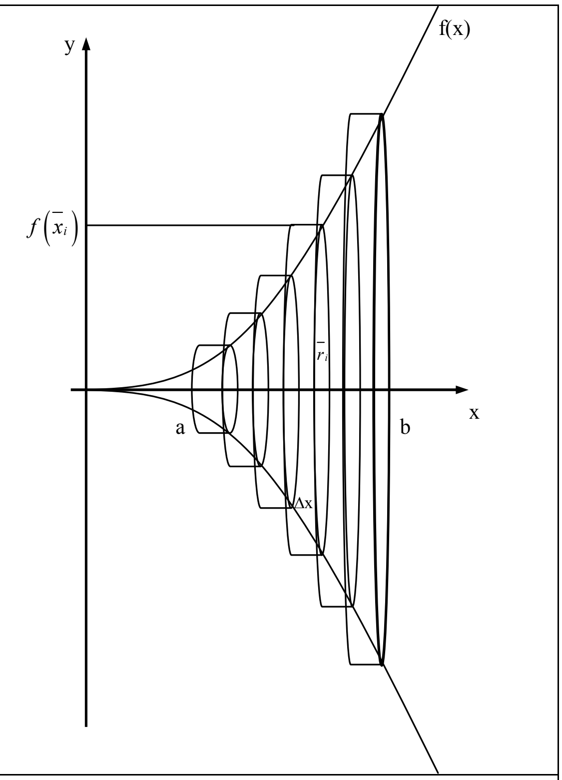
Berechung des Volumens von Rotationskörpern

Wenn der Graph einer stetigen Funktion f um die Abszissenachse rotiert, erzeugt er die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Die rotierende Fläche unter dem Graphen von f erzeugt das Volumen des Rotationskörpers. Analog zur Streifenmethode kann man das Intervall [a; b] in n gleichlange Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ zerlegen. Der Rotationskörper wird in n Kreiszylinder der Höhe Δx zerlegt. Man kann die Zylinder mit den jeweils kleinsten und größten Radien betrachten:

<table>
<tr><td>Skizzen:</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Radius des i-ten Zylinders:</td><td>$\underline{r}_i =$</td><td>$\overline{r}_i =$</td></tr>
<tr><td>Grundfläche des i-ten Zylinders:</td><td>$\underline{A}_i =$</td><td>$\overline{A}_i =$</td></tr>
<tr><td>Volumen des i-ten Zylinders:</td><td>$\underline{V}_i =$</td><td>$\overline{V}_i =$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Das wahre Volumen des Rotationskörpers liegt zwischen der ____________________ Volumina der Kreiszylinder mit den kleinsten Radien (Untersumme) und der ____________________ Volumina der Kreiszylinder mit den größten Radien (Obersumme):</td></tr>
<tr><td>Unter- bzw. Obersumme:</td><td>$s_n =$</td><td>$S_n =$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mit wachsendem n wird die Höhe Δx der Kreiszylinder immer ______________ und die Untersumme nähert sich von unten, die Obersumme von oben dem wahren Volumen des Rotationskörpers an. Die Folgen (s_n) und (S_n) sind ______________ und ______________ und besitzen somit jeweils einen Grenzwert. Da die Funktion f stetig ist, ist auch die Funktion ______________ stetig und deshalb stimmen die Grenzwerte der Unter- und Obersumme überein.
Nach der Definition des bestimmten Integrals ist dieser gemeinsame Grenzwert das bestimmte Integral der Funktion ____________________ im Intervall [a; b]: $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n =$</td></tr>
</table>

Ist f in [a; b] stetig, so entsteht bei der Rotation der Fläche zwischen dem Graphen von f und der Abszissenachse über [a; b] ein Rotationskörper mit dem Volumen $V =$