2. Sachanalyse

In den Jahrgangsstufen 9 und 10 werden entsprechend des Rahmenplans folgende Stoffgebiete unterrichtet:

1. Reelle Zahlen; Termumformungen
2. Systeme linearer Gleichungen, Ungleichungen; quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen
3. Geometrie
4. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen; Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen
5. Winkelfunktionen; trigonometrische Berechnungen
6. Stochastik

Die vorliegende Stunde gliedert sich in das Thema Reelle Zahlen ein. In den vorangehenden Stunden wurden die Potenzgesetze auf Potenzen mit rationalen Exponenten erweitert, der Wurzelbegriff und die reellen Zahlen eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler haben mit der Intervallschachtelung und dem Heron - Verfahren zwei Methoden zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzelwerten kennengelernt. Das in der letzten Unterrichtsstunde eingeführte Heron – Verfahren soll in dieser Stunde genauer untersucht werden. Schwerpunkt der Unterrichtsstunde bildet die Umsetzung des Heron – Verfahrens in dem Computeralgebrasystem DERIVE. In den folgenden Stunden werden das Umformen von Wurzeltermen und das Multiplizieren, Dividieren, Addieren und Subtrahieren von Quadratwurzeln behandelt.

Mit dem Heron – Verfahren kann man Näherungswerte von Quadratwurzeln iterativ berechnen.
Bei iterativen Methoden wird, ausgehend von bekannten Näherungswerten x_k (k = 0, 1, ..., n), für eine Lösung der gegebenen Gleichung schrittweise eine Folge von weiteren Näherungswerten erzeugt, die möglichst schnell gegen die Lösung der Gleichung konvergiert.
Das Heron – Verfahren lässt sich auf das Newton – Verfahren zur numerischen Lösung einer nichtlinearen Gleichung mit einer Unbekannten zurückführen.
Eine Gleichung mit einer Unbekannten lässt sich auf die Nullstellenform

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

bringen. Eine erste Näherung x_0 für die Lösung der Gleichung kann man gewinnen, indem man (1) auf die Form $f_1(x) = f_2(x)$ bringt, bei der der Verlauf der Kurven $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ leicht zu übersehen ist.
Für die Berechnung besserer Näherungen gibt es mehrere Iterationsverfahren. Bei dem *gewöhnlichen Iterationsverfahren* wird die zu lösende Gleichung auf die Fixpunktform

$$x = \varphi(x) \qquad (2)$$

gebracht. Man verwendet die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \text{(n = 0, 1, 2, ...).} \qquad (3)$$

Das Verfahren *Regula falsi* löst die Nullstellengleichung (1) nach der Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_m}{f(x_n) - f(x_m)} f(x_n) \qquad (4)$$

mit n = 1, 2, ...; m < n und zwei gegebenen Startwerten x_0 und x_1. Die Grundidee dieses Verfahrens besteht in der lokalen Approximation der Kurve $y = f(x)$ durch eine Sekante. Beim *Newton – Verfahren* wird der Differenzenquotient von (4) durch die Ableitung $f'(x_n)$ ersetzt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{(n = 0, 1, 2, ...).} \qquad (5)$$

Die Kurve $y = f(x)$ wird lokal durch eine Tangente approximiert.
Das Newton – Verfahren geht aus der Taylorentwicklung (Abbruch der Entwicklung nach dem linearen Glied) der Funktion f(x) hervor.
Für die Konvergenz des Verfahrens ist die Bedingung

$$f'(x) \neq 0 \qquad (6)$$

notwendig, die Bedingung

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \right| \leq K < 1 \qquad \text{(K = const)} \qquad (7)$$

hinreichend. Beide Bedingungen müssen in einer Umgebung der Lösung, die alle Näherungen x_n und die Lösung selbst enthält, erfüllt sein. Falls das Newton – Verfahren konvergiert, dann konvergiert es so gut, dass sich bei jedem Iterationsschritt die Anzahl der genauen Stellen etwa verdoppelt (quadratische Konvergenz).
Ändern sich die Werte von $f'(x_n)$ im Laufe der Iteration nur noch unwesentlich, kann man mit dem modifizierten Newton – Verfahren weiterrechnen, bei dem diese Werte konstant bleiben:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_m)} \qquad \text{(m fest, m < n).} \qquad (8)$$

Mit dem hier zu behandelnden Heron – Verfahren wird die $\sqrt[k]{a}$ näherungsweise bestimmt. Es geht also um die iterative Lösung der Gleichung

$$x^k - a = 0 \qquad (k = 2, 3, ...; a > 0). \tag{9}$$

Den ersten Näherungswert x_0 erhält man, wenn man die Gleichung (9) auf die Form

$$x = \frac{a}{x^{k-1}} \tag{10}$$

bringt, die Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \frac{a}{x^{k-1}}$ in einem Koordinatensystem darstellt und den Schnittpunkt näherungsweise abliest.

Die weiteren Näherungswerte berechnen sich durch Anwendung des Newton – Verfahrens nach Gleichung (5) zu

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} \\ &= \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Bei der Bestimmung von Quadratwurzeln vereinfacht sich Gleichung (11) mit k = 2 zu

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{12}$$

Das Computeralgebrasystem DERIVE stellt den Befehl

ITERATES(f*(x_n), x, x_0, h)

(f*(x_n)...Iterationsausdruck, x...Iterationsvariable, x_0...Startwert, h...Anzahl der Iterationen) für Iterationen bereit.