

Der zweite Strahlensatz

Werden zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die von S aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf jedem Strahl.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$$

bzw. mit Streckenlängen a, b, c, d, e und f:

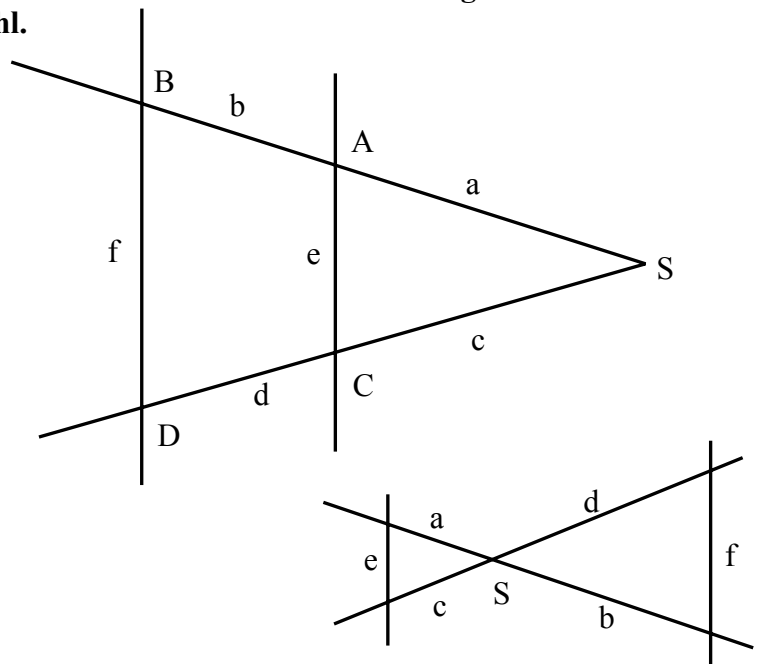
$$\frac{e}{f} = \frac{a}{a+b} \quad \text{und} \quad \frac{e}{f} = \frac{c}{c+d}$$

Beweis:

Voraussetzung: $g(A, C) \parallel g(B, D)$

Behauptung: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$

Beweis: Parallele zu \overline{CD} durch A
Schnittpunkt mit \overline{BD} : E
B ist Anfangspunkt der Strahlen BE und BA



$$\frac{e}{f} = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \frac{e}{f} = \frac{c}{d}$$

Es gilt: $\frac{\overline{ED}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BS}}$ (Gegenseiten im Parallelogramm AEDC)

$\frac{\overline{ED}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}}$ (1. Strahlensatz mit Zentrum B)

$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}}$ (Ersetzen von \overline{ED} durch \overline{AC})

$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$

Beweis für $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$ analog:

Voraussetzung: $g(A, C) \parallel g(B, D)$

Behauptung: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$

Beweis: Parallele zu \overline{BA} durch C
Schnittpunkt mit \overline{BD} : E
D ist Anfangspunkt der Strahlen DE und DC

Es gilt: $\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{SD}}$ (Gegenseiten im Parallelogramm ABEC)

$\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{DS}}$ (1. Strahlensatz mit Zentrum D)

$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{DS}}$ (Ersetzen von \overline{EB} durch \overline{AC})

$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$