Benötigte Binome:

$(a+b)=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Aus dem **Pascal'schen Dreieck** kann man die Koeffizienten ablesen:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Beweis der Summenformel $1+2+3+...+m=\frac{1}{2}m(m+1)$

Satz: Für alle natürlichen Zahlen m∈N gilt: $1+2+3+...+m=\frac{1}{2}m(m+1)$

$$
\begin{aligned}
(0+1)^2&=0^2+2\cdot 0\cdot 1+1^2\\
(1+1)^2&=1^2+2\cdot 1\cdot 1+1^2\\
(2+1)^2&=2^2+2\cdot 2\cdot 1+1^2\\
(3+1)^2&=3^2+2\cdot 3\cdot 1+1^2\\
&\ldots\\
(m+1)^2&=m^2+2\cdot m\cdot 1+1^2
\end{aligned}
$$

Addition der Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2+(m+1)^2&=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2\right)+2\cdot(1+2+3+4+...+m)+(m+1)\\
(m+1)^2&=2\cdot(1+2+3+4+...+m)+(m+1)\\
2\cdot(1+2+3+4+...+m)&=(m+1)^2-(m+1)\\
2\cdot(1+2+3+4+...+m)&=(m+1)\cdot\left[(m+1)-1\right]\\
2\cdot(1+2+3+4+...+m)&=(m+1)\cdot m\\
1+2+3+4+...+m&=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(m+1)
\end{aligned}
$$

In Summenschreibweise:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} i^2+(m+1)^2&=\sum_{i=1}^{m} i^2+2\cdot\sum_{i=1}^{m} i+(m+1)\\
(m+1)^2&=2\cdot\sum_{i=1}^{m} i+(m+1)\\
2\cdot\sum_{i=1}^{m} i&=(m+1)^2-(m+1)\\
2\cdot\sum_{i=1}^{m} i&=(m+1)\cdot\left[(m+1)-1\right]\\
2\cdot\sum_{i=1}^{m} i&=(m+1)\cdot m\\
\sum_{i=1}^{m} i&=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(m+1)
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Beweis der Summenformel $1^2+2^2+3^2+...+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

Satz: Für alle natürlichen Zahlen m∈N gilt: $1^2+2^2+3^2+...+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

$$(0+1)^3=0^3+3\cdot 0^2\cdot 1+3\cdot 0\cdot 1^2+1^3$$
$$(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1^2+1^3$$
$$(2+1)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1^2+1^3$$
$$(3+1)^3=3^3+3\cdot 3^2\cdot 1+3\cdot 3\cdot 1^2+1^3$$
$$...$$
$$(m+1)^3=m^3+3\cdot m^2\cdot 1+3\cdot m\cdot 1^2+1^3$$

Addition der Gleichungen:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+...+m^3+(m+1)^3=(1^3+2^3+3^3+4^3+...+m^3)+3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2)+3\cdot(1+2+3+4+...+m)+(m+1)$$
$$(m+1)^3=3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2)+3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot(m+1)\right)+(m+1)$$
$$3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2)=(m+1)^3-\frac{3}{2}\cdot m\cdot(m+1)-(m+1)$$
$$3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2)=(m+1)\left[(m+1)^2-\frac{3}{2}\cdot m-1\right]$$
$$3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2)=(m+1)\left[m^2+2m+1-\frac{3}{2}\cdot m-1\right]$$
$$3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2)=(m+1)\left[m^2+\frac{1}{2}m\right]$$
$$3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2)=(m+1)\left[\frac{1}{2}m(2m+1)\right]$$
$$3\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2)=\frac{1}{2}m(m+1)(2m+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+4^2+...+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

In Summenschreibweise:

$$\sum_{i=1}^{m}i^3+(m+1)^3=\sum_{i=1}^{m}i^3+3\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2+3\cdot\sum_{i=1}^{m}i+(m+1)$$
$$(m+1)^3=3\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot(m+1)\right)+(m+1)$$
$$3\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2=(m+1)^3-\frac{3}{2}\cdot m\cdot(m+1)-(m+1)$$
$$3\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2=(m+1)\left[(m+1)^2-\frac{3}{2}\cdot m-1\right]$$
$$3\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2=(m+1)\left[m^2+2m+1-\frac{3}{2}\cdot m-1\right]$$
$$3\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2=(m+1)\left[m^2+\frac{1}{2}m\right]$$
$$3\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2=(m+1)\left[\frac{1}{2}m(2m+1)\right]$$
$$3\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2=\frac{1}{2}m(m+1)(2m+1)$$
$$\sum_{i=1}^{m}i^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

q.e.d.

Beweis der Summenformel $1^3+2^3+3^3+...+m^3=\frac{1}{4}m^2\left(m+1\right)^2$

Satz: Für alle natürlichen Zahlen m∈N gilt: $1^3+2^3+3^3+...+m^3=\frac{1}{4}m^2\left(m+1\right)^2$

$$\left(0+1\right)^4=0^4+4\cdot 0^3\cdot 1+6\cdot 0^2\cdot 1^2+4\cdot 0\cdot 1^3+1^4$$
$$\left(1+1\right)^4=1^4+4\cdot 1^3\cdot 1+6\cdot 1^2\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot 1^3+1^4$$
$$\left(2+1\right)^4=2^4+4\cdot 2^3\cdot 1+6\cdot 2^2\cdot 1^2+4\cdot 2\cdot 1^3+1^4$$
$$\left(3+1\right)^4=3^4+4\cdot 3^3\cdot 1+6\cdot 3^2\cdot 1^2+4\cdot 3\cdot 1^3+1^4$$
$$...$$
$$\left(m+1\right)^4=m^4+4\cdot m^3\cdot 1+6\cdot m^2\cdot 1^2+4\cdot m\cdot 1^3+1^4$$

Addition der Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{m}i^4+\left(m+1\right)^4=\sum_{i=1}^{m}i^4+4\cdot\sum_{i=1}^{m}i^3+6\cdot\sum_{i=1}^{m}i^2+4\cdot\sum_{i=1}^{m}i+\left(m+1\right)$$
$$\left(m+1\right)^4=4\cdot\sum_{i=1}^{m}i^3+6\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot m\cdot\left(m+1\right)\left(2m+1\right)\right)+4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(m+1\right)\right)+\left(m+1\right)$$
$$4\cdot\sum_{i=1}^{m}i^3=\left(m+1\right)^4-m\cdot\left(m+1\right)\left(2m+1\right)-2\cdot m\cdot\left(m+1\right)-\left(m+1\right)$$
$$4\cdot\sum_{i=1}^{m}i^3=\left(m+1\right)\left[\left(m+1\right)^3-m\cdot\left(2m+1\right)-2\cdot m-1\right]$$
$$4\cdot\sum_{i=1}^{m}i^3=\left(m+1\right)\left[\left(m^3+3m^2+3m+1\right)-2m^2-m-2\cdot m-1\right]$$
$$4\cdot\sum_{i=1}^{m}i^3=\left(m+1\right)\left[m^3+m^2\right]$$
$$4\cdot\sum_{i=1}^{m}i^3=\left(m+1\right)\left[m^2\left(m+1\right)\right]$$
$$4\cdot\sum_{i=1}^{m}i^3=m^2\left(m+1\right)^2$$
$$\sum_{i=1}^{m}i^3=\frac{1}{4}m^2\left(m+1\right)^2$$

q.e.d.