Potenzen mit rationalen Exponenten; Wurzeln

Definition: (Quadratwurzel)

Sei $a \ge 0$. Die Quadratwurzel (oder kurz: „Wurzel“) aus einer nicht-negativen Zahl a ist diejenige nicht-negative Zahl, deren Quadrat a ist: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Schreibweise: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Bezeichnungen: a heißt Radikand

Beispiel: 5 ist die Quadratwurzel aus 25, weil gilt: $5^2 = 25$; also: $\sqrt{25} = 5$

Definition: (Kubikwurzel; dritte Wurzel)

Sei $a \ge 0$. Die Kubikwurzel (dritte Wurzel) aus einer nicht-negativen Zahl a ist diejenige nicht-negative Zahl, deren dritte Potenz a ist: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

Schreibweise: $\sqrt[3]{a}$

Beispiel: 2 ist die dritte Wurzel aus 8, weil gilt: $2^3 = 8$; also: $\sqrt[3]{8} = 2$

Definition: (n-te Wurzel)

Sei $a \ge 0$, $n \in N$; $n \ge 1$. Die n-te Wurzel aus einer nicht-negativen Zahl a ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ist: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Schreibweise: $\sqrt[n]{a}$

Bezeichnungen: a heißt **Radikand**, n heißt **Wurzelexponent**

Beispiel: 5 ist die 7. Wurzel aus 78125, weil gilt: $5^7 = 78125$; also: $\sqrt[7]{78125} = 5$

Bemerkung: Da $\sqrt[1]{a} = a$ wird $\sqrt[1]{\ }$ nicht geschrieben. Manchmal fordert man auch $n \ge 2$.

Definition: (Potenz mit rationalem Exponenten)

Sei $a > 0$; $m \in Z$; $n \in N$, $n > 0$.

Die Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ ist die n-te Wurzel aus a^m: $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Bemerkungen:

- $n > 0$ wird gefordert, weil keine Division durch Null erlaubt ist.
- $a > 0$ wird gefordert, weil die Wurzel nur aus positiven Zahlen gezogen werden darf.
- $a = 0$ wird ausgeschlossen, damit keine Probleme (Division durch Null) bei negativen Exponenten entstehen.
- $m \in Z$ lässt negative Exponenten zu.

Spezialfälle:

$m = 1 \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$m = -1 \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{-1}{n}} = \sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

Exponent negativ $\quad \Rightarrow \quad a^{\frac{-p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

($p > 0$; $q > 0$)

Potenzgesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten

`Die Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten gelten auch für rationale Exponenten.`

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält.

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p\cdot m}{q\cdot n}} \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt[n]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m} = \sqrt[q\cdot n]{a^{p\cdot m}}$$

(Die Definition wurde so gewählt, dass das Potenzgesetz zum Potenzieren von Potenzen gilt.)

Addition/Subtraktion von Potenzen mit gleicher Basis und gleichen Exponenten

$$x\cdot a^{\frac{p}{q}} \pm y\cdot a^{\frac{p}{q}} = (x\pm y)\cdot a^{\frac{p}{q}} \qquad \text{bzw.} \qquad x\cdot\sqrt[q]{a^p} \pm y\cdot\sqrt[q]{a^p} = (x\pm y)\cdot\sqrt[q]{a^p}$$

Beweis: $x\cdot a^{\frac{p}{q}} \pm y\cdot a^{\frac{p}{q}} = x\cdot\left[\sqrt[q]{a}\right]^p \pm y\cdot\left[\sqrt[q]{a}\right]^p = (x\pm y)\cdot\left[\sqrt[q]{a}\right]^p = (x\pm y)\cdot a^{\frac{p}{q}}$

Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und den Exponenten beibehält: $a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}} = (a\cdot b)^{\frac{p}{q}}$ bzw. $\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p} = \sqrt[q]{(a\cdot b)^p}$

Beweis: $\left(\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p}\right)^q = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\cdot\left(\sqrt[q]{b^p}\right)^q = a^p\cdot b^p = (a\cdot b)^p \overset{q-te\,Wurzel}{\Rightarrow} \sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p} = \sqrt[q]{(a\cdot b)^p}$

Division von Potenzen mit gleichen Exponenten

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividert und den Exponenten beibehält: $a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}}$ bzw. $\frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p}$

Beweis: $\left(\frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}}\right)^q = \frac{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q}{\left(\sqrt[q]{b^p}\right)^q} = \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \overset{q-te\,Wurzel}{\Rightarrow} \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p}$

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält: $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}}$ bzw. $\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$

Beweis: $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}}\cdot a^{\frac{rq}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps}\cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

(Multiplikation von Potenzen mit gleichen Exponenten wird ausgenutzt!)

Division von Potenzen mit gleicher Basis

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält: $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps-rq}{qs}}$ bzw. $\frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}}$

Beweis: $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} : a^{\frac{rq}{qs}} = \frac{\sqrt[qs]{a^{ps}}}{\sqrt[qs]{a^{rq}}} = \sqrt[qs]{\frac{a^{ps}}{a^{rq}}} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}} = a^{\frac{ps-rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

(Division von Potenzen mit gleichen Exponenten wird ausgenutzt!)