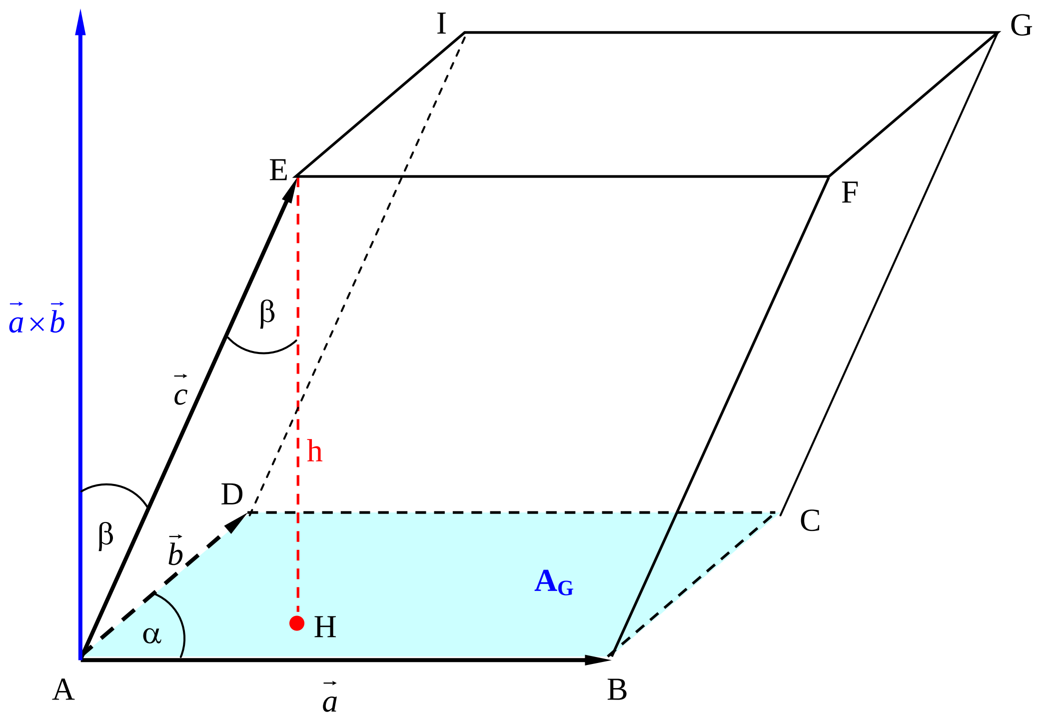
Das Spatprodukt



Der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Spat ABCDEFGI hat das Volumen $V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}\right|$.

Herleitung:

$V = A_G \cdot h$ (Volumen des Prismas ABCDEFGI)

$= \left|\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha \cdot h\right|$ (Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD: $A_G = \left|\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha\right|$)

$= \left|\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot h\right|$ (Betrag des Kreuzprodukts ist Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms)

$= \left|\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\beta\right|$ (Winkelbziehung im rechtwinkligen Dreieck AHE: $\cos\beta = \frac{h}{\left|\vec{c}\right|}$)

(Dreieck AHE rechtwinklig, da die Höhe h senkrecht auf A_G steht)
(β kommt im Dreieck AHE wieder vor, wegen Winkelbeziehung an geschnittenen Parallelen)

$= \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}\right|$ (Berechnung von β mit dem Skalarprodukt mit Hilfe der Vektoren $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ und $\vec{c}$:

$\cos\beta = \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}}{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right| \cdot \left|\vec{c}\right|}$)