Zeigen Sie: Mersennesche Zahlen $M_p = 2^p - 1$ liefern nur Primzahlen, wenn p auch eine Primzahl ist.

Beachte:
Dass p eine Primzahl ist, bedeutet nicht notwendigerweise, dass M_p auch eine Primzahl ist: **Beispiel?**

Satz: (m, n∈N; m > 1; n > 1)
Falls $p = m \cdot n$, so ist $M_p = 2^p - 1$ zusammengesetzt.

Beispiel: $p = 2 \cdot n$

$\Rightarrow$ $2^p - 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n)^2 - 1 = ?$ *(Binomische Formel)*

$\Rightarrow$ $2^p - 1$ lässt sich als Produkt mit zwei Faktoren darstellen, die beide ...

$\Rightarrow$ $2^p - 1$ ist ...

zum Beweis:
Schreiben Sie die n-te Partialsumme für eine geometrische Zahlenfolge mit $a_1 = 1$ auf. Schreiben Sie die Summe ausführlich, multiplizieren Sie mit dem Nenner der rechten Seite der Gleichung und ersetzen Sie q geeignet.

Zeigen Sie: Mersennesche Zahlen $M_p = 2^p - 1$ liefern nur Primzahlen, wenn p auch eine Primzahl ist.

Beachte:
Dass p eine Primzahl ist, bedeutet nicht notwendigerweise, dass M_p auch eine Primzahl ist: **Beispiel?**

Satz: (m, n∈N; m > 1; n > 1)
Falls $p = m \cdot n$, so ist $M_p = 2^p - 1$ zusammengesetzt.

Beispiel: $p = 2 \cdot n$

$\Rightarrow$ $2^p - 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n)^2 - 1 = ?$ *(Binomische Formel)*

$\Rightarrow$ $2^p - 1$ lässt sich als Produkt mit zwei Faktoren darstellen, die beide ...

$\Rightarrow$ $2^p - 1$ ist ...

zum Beweis:
Schreiben Sie die n-te Partialsumme für eine geometrische Zahlenfolge mit $a_1 = 1$ auf. Schreiben Sie die Summe ausführlich, multiplizieren Sie mit dem Nenner der rechten Seite der Gleichung und ersetzen Sie q geeignet.

Zeigen Sie: Mersennesche Zahlen $M_p = 2^p - 1$ liefern nur Primzahlen, wenn p auch eine Primzahl ist.

Beachte:
Dass p eine Primzahl ist, bedeutet nicht notwendigerweise, dass M_p auch eine Primzahl ist: **Beispiel?**

Satz: (m, n∈N; m > 1; n > 1)
Falls $p = m \cdot n$, so ist $M_p = 2^p - 1$ zusammengesetzt.

Beispiel: $p = 2 \cdot n$

$\Rightarrow$ $2^p - 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n)^2 - 1 = ?$ *(Binomische Formel)*

$\Rightarrow$ $2^p - 1$ lässt sich als Produkt mit zwei Faktoren darstellen, die beide ...

$\Rightarrow$ $2^p - 1$ ist ...

zum Beweis:
Schreiben Sie die n-te Partialsumme für eine geometrische Zahlenfolge mit $a_1 = 1$ auf. Schreiben Sie die Summe ausführlich, multiplizieren Sie mit dem Nenner der rechten Seite der Gleichung und ersetzen Sie q geeignet.

Mersennesche Zahlen $M_p = 2^p - 1$ liefern nur Primzahlen, wenn p auch eine Primzahl ist.

Beachte:
Dass p eine Primzahl ist, bedeutet nicht notwendigerweise, dass M_p auch eine Primzahl ist: $\mathbf{M_{11} = 23 \cdot 89}$.

Beispiel: $p = 2 \cdot n$

$$\Rightarrow \quad 2^p - 1 = 2^{2n} - 1 = \left(2^n\right)^2 - 1 == \left(2^n - 1\right) \cdot \left(2^n + 1\right)$$

Binomische Formel: $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

$\Rightarrow$ $2^p - 1$ lässt sich als Produkt mit zwei Faktoren darstellen, die beide größer 1 sind.

$\Rightarrow$ $2^p - 1$ ist zusammengesetzt.

Beweis: **Partialsumme einer geometrischen Zahlenfolge mit q ≠ 1:**

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}\right) \cdot (q - 1) = q^n - 1$$

Ersetzte q durch 2^m:

$$\Rightarrow \quad \left(1 + 2^m + \left(2^m\right)^2 + \left(2^m\right)^3 + \ldots + \left(2^m\right)^{n-1}\right) \cdot \left(2^m - 1\right) = \left(2^m\right)^n - 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + 2^m + 2^{2m} + 2^{3m} + \ldots + 2^{(n-1)m}\right) \cdot \left(2^m - 1\right) = 2^{m \cdot n} - 1$$

$\Rightarrow$ $2^{m \cdot n} - 1$ lässt sich als Produkt mit zwei Faktoren darstellen, die beide größer 1 sind.

$\Rightarrow$ $M_p = 2^p - 1 = 2^{m \cdot n} - 1$ **ist zusammengesetzt**