

Resteberechnung mit Kongruenzen

1. Welchen Rest lässt 2^{1000} bei Division durch 3?
 2. Wie lautet die letzte Ziffer von 2^{1000} ?
 3. Welchen Rest lässt $(m-1)^{(m-1)}$ bei Division durch m ?
 4. Welchen Rest lässt 17^{36} bei Division 19?
 5. Welchen Rest lässt 17^{37} bei Division 19?
 6. Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{4733} ?
-

Resteberechnung mit Kongruenzen

1. Welchen Rest lässt 2^{1000} bei Division durch 3?
 2. Wie lautet die letzte Ziffer von 2^{1000} ?
 3. Welchen Rest lässt $(m-1)^{(m-1)}$ bei Division durch m ?
 4. Welchen Rest lässt 17^{36} bei Division 19?
 5. Welchen Rest lässt 17^{37} bei Division 19?
 6. Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{4733} ?
-

Resteberechnung mit Kongruenzen

1. Welchen Rest lässt 2^{1000} bei Division durch 3?
 2. Wie lautet die letzte Ziffer von 2^{1000} ?
 3. Welchen Rest lässt $(m-1)^{(m-1)}$ bei Division durch m ?
 4. Welchen Rest lässt 17^{36} bei Division 19?
 5. Welchen Rest lässt 17^{37} bei Division 19?
 6. Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{4733} ?
-

Resteberechnung mit Kongruenzen

1. Welchen Rest lässt 2^{1000} bei Division durch 3?
 2. Wie lautet die letzte Ziffer von 2^{1000} ?
 3. Welchen Rest lässt $(m-1)^{(m-1)}$ bei Division durch m ?
 4. Welchen Rest lässt 17^{36} bei Division 19?
 5. Welchen Rest lässt 17^{37} bei Division 19?
 6. Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{4733} ?
-

Resteberechnung mit Kongruenzen

1. Welchen Rest lässt 2^{1000} bei Division durch 3?
2. Wie lautet die letzte Ziffer von 2^{1000} ?
3. Welchen Rest lässt $(m-1)^{(m-1)}$ bei Division durch m ?
4. Welchen Rest lässt 17^{36} bei Division 19?
5. Welchen Rest lässt 17^{37} bei Division 19?
6. Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{4733} ?

Restberechnung mit Kongruenzen

1. Rest von 2^{1000} bei Division durch 3 (2^{1000} hat 302 Stellen)

$$\begin{aligned}
 2 &\equiv 2 && (\text{mod } 3) \\
 2^2 &\equiv 4 \equiv 3 \cdot 1 + 1 \equiv 1 && (\text{mod } 3) \\
 2^3 &\equiv 2 && (\text{mod } 3) \\
 2^4 &\equiv 4 \equiv 1 && (\text{mod } 3) \\
 &\dots && \\
 2^{\text{gerade Zahl}} &\equiv 1 && (\text{mod } 3) \\
 2^{\text{ungerade Zahl}} &\equiv 2 && (\text{mod } 3) \\
 \text{also: } 2^{1000} &\equiv 1 && (\text{mod } 3)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^{1000} \text{ lässt bei Division durch 3 den Rest 1} \Rightarrow 2^{1000} = q \cdot a + 1$$

2. Wie lautet die letzte Ziffer von 2^{1000} ?

äquivalent: Rest von 2^{1000} bei Division durch 10

$$\begin{aligned}
 2 &\equiv 2 && (\text{mod } 10) && 2^{1000} \equiv (2^5)^{200} \equiv 2^{200} && (\text{mod } 10) \\
 2^2 &\equiv 4 && (\text{mod } 10) && 2^{200} \equiv (2^5)^{40} \equiv 2^{40} && (\text{mod } 10) \\
 2^3 &\equiv 8 && (\text{mod } 10) && 2^{40} \equiv (2^5)^8 \equiv 2^8 \equiv 6 && (\text{mod } 10) \\
 2^4 &\equiv 16 \equiv 6 && (\text{mod } 10) && && \\
 2^5 &\equiv 6 \cdot 2 \equiv 12 \equiv 2 && (\text{mod } 10) && \Rightarrow (2^5)^{200} \equiv 2^{200} && (\text{mod } 10) \\
 2^6 &\equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 && (\text{mod } 10) && && \\
 2^7 &\equiv 4 \cdot 2 \equiv 8 && (\text{mod } 10) && && \\
 2^8 &\equiv 6 && (\text{mod } 10) && \text{letzte Stelle: } \underline{\mathbf{6}} && \\
 &\dots && && &&
 \end{aligned}$$

$2^{1000} =$
 10715086071862673209484250490600018105614048117055336
 07443750388370351051124936122493198378815695858127594
 67291755314682518714528569231404359845775746985748039
 34567774824230985421074605062371141877954182153046474
 98358194126739876755916554394607706291457119647768654
 2167660429831652624386837205668069376

3. Rest von $(m-1)^{(m-1)}$ bei Division durch m

$$m-1 \equiv m-1 \pmod{m}$$

$$(m-1)^2 \equiv m^2 - 2m + 1 \equiv m \cdot (m-2) + 1 \equiv 1 \pmod{m}$$

$$(m-1)^3 \equiv 1 \cdot (m-1) \equiv m-1 \pmod{m}$$

$$(m-1)^4 \equiv (m-1)^2 \equiv 1 \pmod{m}$$

...

$$(m-1)^{\text{ungerade}} \equiv m-1 \pmod{m}$$

$$(m-1)^{\text{gerade}} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$m \text{ gerade (} m-1 \text{ ist dann ungerade): } (m-1)^{(m-1)} \equiv m-1 \pmod{m}$$

$$m \text{ ungerade (} m-1 \text{ ist dann gerade): } (m-1)^{(m-1)} \equiv 1 \pmod{m}$$

4. Rest von 17^{36} bei Division 19

$$17 \equiv 17 \equiv -2 \pmod{19}$$

$$17^2 \equiv 4 \pmod{19}$$

$$17^3 \equiv -8 \pmod{19}$$

$$17^4 \equiv 16 \equiv -3 \pmod{19}$$

$$17^5 \equiv 6 \pmod{19}$$

$$17^6 \equiv -12 \equiv 7 \pmod{19}$$

$$17^7 \equiv -14 \equiv 5 \pmod{19}$$

$$17^8 \equiv -10 \equiv 9 \pmod{19}$$

$$17^9 \equiv -18 \equiv 1 \pmod{19}$$

$$17^{36} \equiv (17^9)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{19}$$

17^{36} lässt den Rest 1 bei Division durch 19.

5. Rest von 17^{37} bei Division 19

$$17 \equiv 17 \pmod{19}$$

$$17^{36} \equiv 1 \pmod{19}$$

$$17^{37} \equiv 17 \pmod{19}$$

17^{37} lässt den Rest 17 bei Division durch 19.

6. Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{4733} ?

äquivalent: Rest von 7^{4733} bei Division durch 10

$$7 \equiv 7 \equiv -3 \pmod{10}$$

$$7^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$$

$$7^3 \equiv 63 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$7^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$7^{4733} \equiv 7^{4732} \cdot 7 \equiv (7^4)^{1183} \cdot 7 \equiv 1^{1183} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{10}$$

letzte Stelle: 7