

Zahlentheorie: Grundlagen

$a, b \in \mathbb{Z}$. Eine Zahl a heißt **Teiler von einer Zahl b** , wenn eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass gilt: $b = m \cdot a$.

Schreibweise: $a|b$ Beispiele: $7|21$, da $21 = 3 \cdot 7$; $12|-60$, da $-60 = -5 \cdot 12$; $-6|24$, da $24 = -4 \cdot (-6)$

Teilbarkeitseigenschaften Für alle $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

Nr.	Eigenschaft	Beispiele	Erläuterung und Beweisskizze
1.	$a a$	$6 6; -12 -12$	Jede Zahl teilt sich selbst, da gilt: $a = 1 \cdot a$
2.	$a 0$	$14 0; -7 0$	Jede Zahl teilt die Null, da gilt: $0 = 0 \cdot a$
3.	$1 a$	$1 15; 1 -3$	Eins teilt jede Zahl, da gilt: $a = a \cdot 1$
4.	$a b$ und $b a \Rightarrow a = \pm b$	$6 6$ und $6 6 \Rightarrow 6 = 6$ $6 -6$ und $-6 6 \Rightarrow 6 = -(-6)$	Wenn a die Zahl b teilt und b gleichzeitig a teilt, dann müssen die Beträge von a und b gleich sein: $b = m \cdot a$ und $a = n \cdot b \Rightarrow a = (n \cdot m) \cdot a$ $\Rightarrow n \cdot m = 1 \Rightarrow (n=1 \wedge m=1) \vee (n=-1 \wedge m=-1) \Rightarrow a = \pm b$
5.	$a b$ und $b c \Rightarrow a c$	$3 9$ und $9 27 \Rightarrow 3 27$ $3 9 \Rightarrow 3 18; 3 27; 3 36$ $\Rightarrow 3 -9; 3 -18; 3 -27$	Wenn a ein Teiler von b ist, dann teilt a auch jede Zahl, die b teilt: $b = m \cdot a$ und $c = n \cdot b \Rightarrow c = (n \cdot m) \cdot a \Rightarrow a c$
6.	$a b$ und $a c \Rightarrow a (b \pm c)$	$4 8$ und $4 20 \Rightarrow 4 28; 4 -12$	Wenn a sowohl b als auch c teilt, so teilt a auch die Summe und die Differenz von b und c : $b = m \cdot a$ und $c = n \cdot a \Rightarrow b \pm c = (m \pm n) \cdot a \Rightarrow a (b \pm c)$
7.	$a b$ und $c d \Rightarrow a \cdot c b \cdot d$	$5 10$ und $3 9 \Rightarrow 15 90$ $-3 9$ und $2 6 \Rightarrow -6 54$	Das Produkt der Teiler zweier Zahlen b und d teilt das Produkt der zwei Zahlen b und d : $b = m \cdot a$ und $d = n \cdot c \Rightarrow b \cdot d = (m \cdot n) \cdot a \cdot c \Rightarrow a \cdot c b \cdot d$
8.	$a b \Rightarrow a b \cdot c$	$7 14 \Rightarrow 7 28$ $\Rightarrow 7 -56$	Ist a ein Teiler von b , so teilt a auch jedes Vielfache von b : Regel 7 mit $a b$ und $1 c$

Jede natürliche Zahl, die größer 1 ist und die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, heißt **Primzahl**.

Folgerung: Eine Primzahl p lässt sich nicht als Produkt $p = p_1 \cdot p_2$ mit $1 < p_1$ und $1 < p_2$ ($p_1, p_2 \in \mathbb{N}$) schreiben.

Eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist und außer 1 und sich selbst noch mindestens einen weiteren positiven Teiler besitzt, heißt **zusammengesetzte Zahl**.

Folgerung: Eine zusammengesetzte Zahl n lässt sich als Produkt $n = n_1 \cdot n_2$ mit $1 < n_1$ und $1 < n_2$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$) schreiben.

Eine Zahl, die Teiler mehrerer Zahlen ist, heißt **gemeinsamer Teiler** dieser Zahlen.

Beispiel: gemeinsame Teiler von 28 und 42: 1, 2, 7, 14

Der **größte gemeinsame Teiler** gegebener Zahlen ist die größte Zahl, die alle diese Zahlen teilt.

Schreibweise: $ggT(a, b, c, \dots)$ Beispiel: $ggT(28, 42) = 14$

Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen zueinander **teilerfremd**.

Beispiel: 21 und 40 sind teilerfremd Achtung: 1 ist Teiler jeder Zahl, aber 1 ist zu jeder Zahl teilerfremd

Folgerung: Zwei natürliche Zahlen a und b sind teilerfremd $\Leftrightarrow ggT(a, b) = 1$.

Zwei natürliche Zahlen m und n sind nicht teilerfremd $\Leftrightarrow ggT(m, n) > 1$.

p Primzahl, $a \in \mathbb{N}$: $ggT(a, p) = 1 \Leftrightarrow a$ und p teilerfremd $\Leftrightarrow a$ kein Vielfaches von p

Ein Teiler einer Zahl heißt **Primteiler** der Zahl, wenn der Teiler eine Primzahl ist.

Beispiel: 2, 3 und 7 sind Primteiler von 42

Satz: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist Primzahl oder lässt sich **eindeutig** als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beispiele: $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

Folgerung: Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt mindestens einen Primteiler.

Zahlentheorie: Grundlagen

$a, b \in \mathbb{Z}$. Eine Zahl a heißt **Teiler von einer Zahl b** , wenn eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass gilt: $b = m \cdot a$.

Schreibweise: $a|b$ Beispiele: $7|21$, da $21 = 3 \cdot 7$
 $12|-60$, da $-60 = -5 \cdot 12$
 $-6|24$, da $24 = -4 \cdot (-6)$

Teilbarkeitseigenschaften Für alle $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

Nr.	Eigenschaft	Beispiele	Erläuterung und Beweisskizze
1.	$a a$	$6 6$; $-12 -12$	Jede Zahl teilt sich selbst, da gilt: $a = 1 \cdot a$
2.	$a 0$	$14 0$; $-7 0$	Jede Zahl teilt die Null, da gilt: $0 = 0 \cdot a$
3.	$1 a$	$1 15$; $1 -3$	Eins teilt jede Zahl, da gilt: $a = a \cdot 1$
4.	$a b$ und $b a$ $\Rightarrow a = \pm b$	$6 6$ und $6 6$ $\Rightarrow 6 = 6$ $6 -6$ und $-6 6$ $\Rightarrow 6 = -(-6)$	Wenn a die Zahl b teilt und b gleichzeitig a teilt, dann müssen die Beträge von a und b gleich sein: $b = m \cdot a$ und $a = n \cdot b$ $\Rightarrow a = (n \cdot m) \cdot a \Rightarrow n \cdot m = 1$ $\Rightarrow (n=1 \wedge m=1) \vee (n=-1 \wedge m=-1) \Rightarrow a = \pm b$
5.	$a b$ und $b c$ $\Rightarrow a c$	$3 9$ und $9 27$ $\Rightarrow 3 27$ $3 9 \Rightarrow 3 18$; $3 27$; $3 36$; $3 -9$; $3 -18$; $3 -27$	Wenn a ein Teiler von b ist, dann teilt a auch jede Zahl, die b teilt: $b = m \cdot a$ und $c = n \cdot b$ $\Rightarrow c = (n \cdot m) \cdot a \Rightarrow a c$
6.	$a b$ und $a c$ $\Rightarrow a (b \pm c)$	$4 8$ und $4 20$ $\Rightarrow 4 28$; $4 -12$	Wenn a sowohl b als auch c teilt, so teilt a auch die Summe und die Differenz von b und c : $b = m \cdot a$ und $c = n \cdot a$ $\Rightarrow b \pm c = (m \pm n) \cdot a \Rightarrow a (b \pm c)$
7.	$a b$ und $c d$ $\Rightarrow a \cdot c b \cdot d$	$5 10$ und $3 9$ $\Rightarrow 15 90$ $-3 9$ und $2 6$ $\Rightarrow -6 54$	Das Produkt der Teiler zweier Zahlen b und d teilt das Produkt der zwei Zahlen b und d : $b = m \cdot a$ und $d = n \cdot c$ $\Rightarrow b \cdot d = (m \cdot n) \cdot a \cdot c$ $\Rightarrow a \cdot c b \cdot d$
8.	$a b \Rightarrow a b \cdot c$	$7 14$ $\Rightarrow 7 28$; $7 -56$	Ist a ein Teiler von b , so teilt a auch jedes Vielfache von b : Regel 7 mit $a b$ und $1 c$

Jede natürliche Zahl, die größer 1 ist und die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, heißt **Primzahl**.

Folgerung: Eine Primzahl p lässt sich nicht als Produkt $p = p_1 \cdot p_2$ mit $1 < p_1$ und $1 < p_2$ ($p_1, p_2 \in \mathbb{N}$) schreiben.

Eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist und außer 1 und sich selbst noch mindestens einen weiteren positiven Teiler besitzt, heißt **zusammengesetzte Zahl**.

Folgerung: Eine zusammengesetzte Zahl n lässt sich als Produkt $n = n_1 \cdot n_2$ mit $1 < n_1$ und $1 < n_2$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$) schreiben.

Eine Zahl, die Teiler mehrerer Zahlen ist, heißt **gemeinsamer Teiler** dieser Zahlen.

Beispiel: gemeinsame Teiler von 28 und 42: 1, 2, 7, 14

Der **größte gemeinsame Teiler** gegebener Zahlen ist die größte Zahl, die alle diese Zahlen teilt.

Schreibweise: $\text{ggT}(a, b, c, \dots)$

Beispiel: $\text{ggT}(28, 42) = 14$

Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen zueinander **teilerfremd**.

Beispiel: 21 und 40 sind teilerfremd

Achtung: 1 ist Teiler jeder Zahl, aber 1 ist zu jeder Zahl teilerfremd

Folgerung:

Zwei natürliche Zahlen a und b sind teilerfremd $\Leftrightarrow \text{ggT}(a, b) = 1$.

Zwei natürliche Zahlen m und n sind nicht teilerfremd $\Leftrightarrow \text{ggT}(m, n) > 1$.

p Primzahl, $a \in \mathbb{N}$: $\text{ggT}(a, p) = 1 \Leftrightarrow a$ und p teilerfremd $\Leftrightarrow a$ kein Vielfaches von p

Ein Teiler einer Zahl heißt **Primteiler** der Zahl, wenn der Teiler eine Primzahl ist.

Beispiel: 2, 3 und 7 sind Primteiler von 42

Satz: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist Primzahl oder lässt sich **eindeutig** als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beispiele: $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

Folgerung: Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt mindestens einen Primteiler.